**5 класс**

5.1. В примере на сложение двух чисел первое слагаемое меньше суммы на 2000, а сумма больше второго слагаемого на 6. Восстановите пример.

5.2. Составьте квадрат, используя ровно четыре из пяти изображенных ниже фигур. Каждую из четырех выбранных Вами фигур можно использовать только один раз.



5.3. Без ореха (от дупла до орешника) белка бежит со скоростью 4 м/сек, а с орехом (от орешника до дупла) — со скоростью 2 м/сек. На путь от дупла до орешника и обратно она тратит 54 секунды. Найдите расстояние от дупла до орешника. Ответ обоснуйте.

5.4. В день рождения дяди Федора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит, что дяде Федору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Федору, если известно, что ровно один из них ошибся? Ответ обоснуйте.

5.5. В забеге от Воробьевых гор до Красной площади приняли участие три спортсмена. Сначала стартовал Гриша, затем — Саша, и последней — Лена. После финиша выяснилось, что во время забега Гриша обгонял других 10 раз, Лена — 6 раз, Саша — 4 раза, причем все трое ни разу не оказывались в одной точке одновременно. В каком порядке финишировали спортсмены, если известно, что они пришли к финишу в разное время? Ответ обоснуйте.

**5 класс.**

 **Решения.**

5.1. Ответ: 6+2000 = 2006.

Если из суммы двух чисел вычесть одно из слагаемых, то получится другое слагаемое. Из условия следует, что второе слагаемое равно 2000, а первое - равно 6.

5.2. Ответ: cм. рисунок.



 Можно определить длину стороны искомого квадрата. Общее количество клеток пяти фигур равно 4+5+6+6+9=30. Значит, если можно составить квадрат, то только со стороной 5. Таким образом, лишней является фигура из пяти клеток.

5.3. Ответ: 72 метра.

Поскольку обратно белка бежит в два раза медленнее, то время, затраченное белкой на обратную дорогу, в два раза больше времени, которое она тратит на дорогу от дупла до орешника. Поэтому, время, затраченное на дорогу от дупла до орешника, в три раза меньше времени, затраченного на всю дорогу, то есть, равно 54 : 3 = 18 секунд. Следовательно, расстояние от дупла до орешника равно 18\*4 = 72 метра.

5.4. Ответ: дяде Федору 11 лет.

Заметим, что если не ошибся Шарик, то не ошибся и Матроскин, что противоречит условию. Значит, Шарик сказал неправду, в отличие от кота Матроскина. Таким образом, дяде Федору больше 10 лет, но не меньше 11. Следовательно, дяде Федору исполнилось 11 лет.

5.5. Ответ: первым финишировал Гриша, затем - Саша, и последней - Лена.

Гриша стартовал первым. Чтобы он смог совершить 10 обгонов, необходимо чтобы Саша и Лена обогнали его хотя бы 10 раз. Так как общее количество обгонов Саши и Лены равно 6 + 4 = 10, то они обгоняли только Гришу и не обгоняли друг друга. После того, как Гриша совершил все 10 обгонов, он опять оказался первым. Значит, спортсмены финишировали в том же порядке, в котором и стартовали.

**Задачи на переливание**

1. Есть два сосуда по 10 литров и один по 3 литра. В первом сосуде 4 литра воды, во втором 10 литров а в третьем пусто.
2. Есть 2 бочки по 100 литров, одна пустая, вторая с водой, есть три сосуда на 3 литра, на 6 литров, на 9 литров.

Следует понимать, что, например, в 5-литровый сосуд, можно налить ровно 5 литров. Если из этого 5-литрового сосуда наполнить полностью 3-литровый, то в 5-литровом останется ровно 2 литра.



Удобно записывать решение и в горизонтальную таблицу.



**Реши задачи.**

**1.** Для разведения картофельного пюре быстрого приготовления "Зеленый великан" требуется 1 л воды. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 литров, налить 1 литр воды из водопроводного крана?

**2.** Как с помощью 2-литровой и 5-литровой банок отмерить ровно 1 литр?

**3.** Как, имея пятилитровое ведро и девятилитровую банку, набрать из реки ровно три литра воды?

**4.** Для марш-броска по пустыне путешественнику необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе, где имеется источник воды, выдают только 5-литровые фляги, а также имеются 3-литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра во флягу?

**5.** Есть два кувшина емкостью 5 л и 9 л. Нужно набрать из источника 7 л воды, если можно пользоваться только кувшинами.

**Решение**

**1.** Для разведения картофельного пюре быстрого приготовления "Зеленый великан" требуется 1 л воды. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 литров, налить 1 литр воды из водопроводного крана?


**2.** Как с помощью 2-литровой и 5-литровой банок отмерить ровно 1 литр?


Можно найти решение, если первым шагом заполнить 2-литровую банку. Правда, в решении больше действий…



**3.** Как, имея пятилитровое ведро и девятилитровую банку, набрать из реки ровно три литра воды?


**4.** Для марш-броска по пустыне путешественнику необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе, где имеется источник воды, выдают только 5-литровые фляги, а также имеются 3-литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра во флягу?


Если начать с наполнения 5 литровой фляги, то получится более короткое решение (презентация, слайд 2).

**5.** Есть два кувшина емкостью 5 л и 9 л. Нужно набрать из источника 7 л воды, если можно пользоваться только кувшинами.
Решим задачу, наполнив первым действием 5-литровый кувшин.


Решим задачу иначе. Наполним первым действием 9-литровый кувшин.



**Задачи на взвешивание**

1. У Буратино есть 27 золотых монет. Но известно, что Кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определить фальшивую монету?
2. Мачеха послала Золушку на рынок. Дала ей девять монет: из них 8 настоящих, а одна фальшивая – она легче чем настоящая. Как найти ее Золушке за два взвешивания?
3. Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета? Hаходить фальшивую монету не требуется. .
4. Имеется 8 монет. Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты. Определите за 3 взвешивания какая из монет фальшивая.
5. Имеется 10 монет. Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты. Как, с помощью чашечных весов без гирь, определить какая из монет фальшивая?
6. У Буратино есть 27 золотых монет. Но известно, что Кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определить фальшивую монету?

**Решение**

Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она - в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете - фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части. Задача решена.

1. Мачеха послала Золушку на рынок. Дала ей девять монет: из них 8 настоящих, а одна фальшивая – она легче чем настоящая. Как найти ее Золушке за два взвешивания?

**Решение**

Разделим 9 монет на 3 равных кучки. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она - в третьей кучке). Остается из трех монет определить более легкую: кладем на чаши весов по 1 монете - фальшивкой является более легкая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета.

1. Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета? Hаходить фальшивую монету не требуется.

**Решение**

Взвешиваем 50 и 50 монет: два случая.
1 случай. Равенство. Берем оставшуюся монету и ставим ее в левую кучку вместо одной из имеющихся там:
а) Левая кучка тяжелее => фальшивая монета тяжелее;
б) Левая кучка легче => фальшивая монета легче.
2 случай. Неравенство. Берем более тяжелую кучку и разбиваем ее на две кучки по 25 монет:
а) Вес кучек одинаковый => фальшивая монета легче;
б) Вес кучек неодинаковый => фальшивая монета тяжелее.

1. Имеется 8 монет. Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты. Определите за 3 взвешивания какая из монет фальшивая.

**Решение**

Делим монеты на две равные кучки – по 4 монеты в каждой. Взвешиваем. Ту кучку, которая легче, опять делим на две одинаковых кучки – теперь по две монеты в каждой. Взвешиваем. Определяем, какая из них легче. Кладем на чаши весов по 1 монете из этой кучки. Фальшивая та, которая легче. Задача решена.

1. Имеется 10 монет. Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты. Как, с помощью чашечных весов без гирь, определить какая из монет фальшивая?

**Решение**

Разделим 10 монет на 2 равных кучки – по 5 монет. Положим на чаши весов. Определим, в какой из этих кучек находится фальшивая монета. Теперь эту кучку делим на 3 кучки – в двух из них по две монеты, в третьей одна монета. Взвешиваем кучки, в которых по две монеты. Если весы покажут равенство, то фальшивка в третьей кучке. Если покажут неравенство, то фальшивая монета в кучке, которая легче. Теперь кладем на чаши весов по 1 монете из этой кучки – фальшивкой является более легкая. Задача решена.

### Логические задачи

1. В три банки с надписями "малиновое", "клубничное" и "малиновое или клубничное" налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку "клубничное"?
2. Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: "У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек." Прав ли он?
3. У императора украли перец. Как известно, те, кто крадут перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?
4. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или фамилия, или отчество. Может ли такое быть?
5. Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 24 цента и 2 бифштекса. Бармен сказал, что с него 20 долларов 5 центов. Ковбой Джо высказал бармену всё, что он думает о его умении считать. Действительно ли бармен ошибся?
6. Кто-то подарил Златовласке подарок, положив его на крыльцо её дома. Златовласка подозревает, что это был один из её друзей: Стрекоза, Огонёк или Ушастик. Но как это узнать? Каждый из них указывает на одного из двух других. Правду сказала только Стрекоза. Если бы каждый указывал не на того, на кого указывает, а на второго, то Ушастик был бы единственным, кто сказал правду. Кто же подарил подарок?
7. Кто-то из трёх друзей таким же образом подарил подарок Синеглазке. На вопросы Синеглазки Огонёк отвечал, что это Ушастик, а что сказали Ушастик и Стрекоза, Синеглазка забыла. Златовласка взяла дело в свои руки и выяснила, что только один из троих сказал правду, и именно он и сделал подарок. Кто подарил подарок?
8. Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зелёной рубашках. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а рубашка нет. Каких цветов били туфли и рубашка у Бома и Бима?

#### Дополнительные задачи

1. Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения:
*Афродита:* "Я самая прекрасная".
*Афина:* "Афродита не самая прекрасная".
*Гера:* "Я самая прекрасная".
*Афродита:* "Гера не самая прекрасная".
*Афина:* "Я самая прекрасная".
Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь?
2. Каждый житель острова Сонный просыпается всегда одним и тем же способом. Способов всего три: (А) открыть одновременно оба глаза и бежать на зарядку; (Б) открыть сначала левый глаз, а через 16 минут — правый, и бежать на завтрак; (В) открыть сначала правый глаз, а через 27 минут — левый. В социологическом опросе службы "Доброе утро" приняли участие жители городов Кривдина и Правдина, всего 1024 островитянина. Каждому было задано по 3 вопроса: (1) "Просыпаетесь ли Вы способом А?", (2) "Просыпаетесь ли Вы способом Б?", (3) "Просыпаетесь ли Вы способом В?" Ответов "Да" на первый вопрос было 289, на второй вопрос — 361, на третий вопрос — 441. Сколько жителей каждого из городов приняло участие в опросе?

### Логические задачи

1. В три банки с надписями "малиновое", "клубничное" и "малиновое или клубничное" налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку "клубничное"?

Решение Ответ

Решение. Так как все надписи неправильные, то в третьей банке не может быть ни малиновое, ни клубничное варенье. Значит, там смородиновое варенье. Тогда клубничное и малиновое должны быть в первых двух банках. А так как надписи неправильные, то в банке "клубничное" на самом деле малиновое варенье.

2.Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: "У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек." Прав ли он?

Решение

Решение. Нет, он неправ.
Первым утверждением он говорит, что если человек великий, то у него плохой почерк. Но из этого совершенно не следует, что *обратное* утверждение тоже верно: то есть, что человек с плохим почерком великий. Таким образом, его вывод неверен.
Можно привести много верных математических утверждений, обратные к которым неверны. Например: если два числа чётны, то их сумма тоже чётна. Но совсем не обязательно, что если сумма двух чисел чётна, то оба они тоже чётны (3 + 5 = 8).

3.У императора украли перец. Как известно, те, кто крадут перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?

Решение Ответ

Решение. Предположим, что он виновен. Значит, он должен всегда лгать. Кроме того, так как это он украл перец, то он должен знать, кто его украл: это он сам. Но тогда получается, что он сказал правду. Противоречие.
Значит, наше предположение неверно, и виновным он быть не может.

4.Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или фамилия, или отчество. Может ли такое быть?

Решение

Решение. Может. Например:
Иванов Александр Сергеевич
Иванов Павел Васильевич
Гусев Александр Васильевич
Гусев Павел Сергеевич

5.Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 24 цента и 2 бифштекса. Бармен сказал, что с него 20 долларов 5 центов. Ковбой Джо высказал бармену всё, что он думает о его умении считать. Действительно ли бармен ошибся?

Решение

Решение. Выразим цены всех товаров в центах. Так как 40 — чётное число, то несколько бутылок Кока-Колы, купленные Джо, стоят чётное число центов. Аналогично сэндвичи стоят чётное число центов. Так как бифштекса два, то оба они вместе также стоят чётное число центов. Получается, что каждый товар стоит чётное число центов, поэтому стоимость всего заказа должна тоже выражаться чётным количеством центов. Но 20 долларов 5 центов — это 2005 центов: нечётное число. Значит, бармен ошибся.

6.Кто-то подарил Златовласке подарок, положив его на крыльцо её дома. Златовласка подозревает, что это был один из её друзей: Стрекоза, Огонёк или Ушастик. Но как это узнать? Каждый из них указывает на одного из двух других. Правду сказала только Стрекоза. Если бы каждый указывал не на того, на кого указывает, а на второго, то Ушастик был бы единственным, кто сказал правду. Кто же подарил подарок?

Решение Ответ

Решение. Это не могла быть Стрекоза, так как если бы это она подарила подарок, то она указала бы на себя, так как она сказала правду. Из таких же соображений следует, что это не мог быть Ушастик. Значит, это был Огонёк.

7.Кто-то из трёх друзей таким же образом подарил подарок Синеглазке. На вопросы Синеглазки Огонёк отвечал, что это Ушастик, а что сказали Ушастик и Стрекоза, Синеглазка забыла. Златовласка взяла дело в свои руки и выяснила, что только один из троих сказал правду, и именно он и сделал подарок. Кто подарил подарок?

Решение Ответ

Решение. Так как тот, кто подарил подарок, сказал правду, то он должен был указать на себя. Поэтому подарок подарил не Огонёк, так как он указал на Ушастика. Кроме того, отсюда следует, что он сказал неправду. Значит, подарок подарил не Ушастик. Получается, что это была Стрекоза.

8.Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зелёной рубашках. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а рубашка нет. Каких цветов били туфли и рубашка у Бома и Бима?

Решение Ответ

Решение. Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Бам** | **Бим** | **Бом** |
| **рубашка** | не зел. | *одинак.* | не кр. |
| **туфли** | **зел.** | *одинак.* | не кр. |

У Бама зелёные туфли, поэтому двум другим клоунам остаются синие и красные. У Бама не красные. Значит, у него синие, а красные у Бима. Тогда рубашка у Бима тоже красная.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Бам** | **Бим** | **Бом** |
| **рубашка** | не зел. | **кр.** | не кр. |
| **туфли** | **зел.** | **кр.** | **син.** |

Баму и Бому остаются зелёная и синяя рубашки. У Бама не зелёная. Значит, у него синяя, а зелёная у Бома.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Бам** | **Бим** | **Бом** |
| **рубашка** | **син.** | **кр.** | **зел.** |
| **туфли** | **зел.** | **кр.** | **син.** |

#### Дополнительные задачи

9.Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения:
*Афродита:* "Я самая прекрасная".
*Афина:* "Афродита не самая прекрасная".
*Гера:* "Я самая прекрасная".
*Афродита:* "Гера не самая прекрасная".
*Афина:* "Я самая прекрасная".
Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь?

Решение Ответ

Решение. Если Афина самая прекрасная, то Афродита не самая прекрасная и должна говорить неправду. Тогда утверждение "Гера не самая прекрасная." должно быть неправдой. Но оно верно. Противоречие.
Если Гера самая прекрасная, то Афина не самая прекрасная и должна говорить неправду. Тогда утверждение "Афродита не самая прекрасная." должно быть неправдой. Но оно верно. Противоречие.
Значит, самой прекрасной может быть только Афродита. Легко убедиться, что это вариант подходит.

10.Каждый житель острова Сонный просыпается всегда одним и тем же способом. Способов всего три: (А) открыть одновременно оба глаза и бежать на зарядку; (Б) открыть сначала левый глаз, а через 16 минут — правый, и бежать на завтрак; (В) открыть сначала правый глаз, а через 27 минут — левый. В социологическом опросе службы "Доброе утро" приняли участие жители городов Кривдина и Правдина, всего 1024 островитянина. Каждому было задано по 3 вопроса: (1) "Просыпаетесь ли Вы способом А?", (2) "Просыпаетесь ли Вы способом Б?", (3) "Просыпаетесь ли Вы способом В?" Ответов "Да" на первый вопрос было 289, на второй вопрос — 361, на третий вопрос — 441. Сколько жителей каждого из городов приняло участие в опросе?

Решение Ответ

Решение. Для каждого человека подходит только один вариант ответа, а два не подходят. Поэтому житель города Правдина должен один раз ответить "Да" и два раза "Нет", а житель города Кривдина, наоборот, один раз "Нет" и два раза "Да". Таким образом, если бы все участники опроса были из Правдина, то ответов "Да" было бы столько же, сколько и участников, то есть, 1024. Каждый житель Кривдина даёт два ответа "Да", добавляя один лишний ответ.
Всего ответов "Да" было 289 + 361 + 441 = 1091. Значит, жителей Кривдина было 1091 − 1024 = 67. А жителей Правдина 1024 − 67 =

**Делимость целых чисел и остатки**

1. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

2. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

3. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

4. Докажите, что при любом натуральном n:

  а) число 55n+1 + 45n+2 + 35n делится на 11.

  б) число 25n+3 + 5n·3n+2 делится на 17.

5. Докажите, что:

  а) если х2+у2 делится на 3 и числа х, у целые, то х и у делятся на 3;

  б) если сумма трёх целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих чисел делится на 6;

  в) если p и q простые числа и p>3, q>3, то p2–q2 делится на 24;

  г) если a, b, c – любые целые числа, то найдутся такие взаимно простые k и t, что ak+bt делится на c.

6. Найдите:

  а) наибольший общий делитель чисел 2n+3 и n+7;

  б) все пары натуральных чисел х, у таких, что 2х+1 делится на у и 2у+1 делится на х;

  в) все целые k, для которых k5+3 делится на k2+1;

  г) хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел n, n+1, n+2, ... , n+20 имеет с числом 30030=2·3·5·7·11·13 общий делитель, больший единицы.

7. Существует ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого каждая цифра встречается по одному разу?

8. Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырёхзначное число, которое делится на их произведение. Найти эти числа.

 9. Докажите, что при любых натуральных k и n число 12k+1 + 22k+1 + . . . + n2k+1 не делится на n + 2.

10. Докажите, что для любого простого числа р > 2 числитель m дроби



делится на p.

**Задача 24:** Докажите, что любое натуральное число сравнимо со своей последней цифрой по модулю а) 10; б) 2; в) 5.

**Задача 25:** Докажите, что .

**Задача 26:** Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2n и 5n.

**Задача 27:** Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечетна.

**Задача 28:** Предпоследняя цифра квадрата натурального числа – нечетная. Докажите, что его последняя цифра 6.

**Задача 29:** Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

**Задача 30:** Найдите 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.

**Задача 31:** Докажите, что любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр по модулю а) 3; б) 9.

**Задача 32:** Можно ли записать точный квадрат, использовав по 10 раз цифры а) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3 ?

**Задача 33:** У числа 2¹ºº нашли сумму цифр, у результата снова нашли сумму цифр и т.д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

**Задача 34:** Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

**Задача 35:** К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

**Задача 36:** Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них – 97?

**Задача 37:** Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр..

**Задача 38:** Докажите, что произведение последней цифры числа 2n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

**Задача 39:** Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

**Задача 40:** Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

**Задача 41:** Пусть A – сумма цифр числа 44444444, а B – сумма цифр числа A. Найдите сумму цифр числа B.

**Задача 42:** Докажите, что



**Задача 43:** Докажите, что число 111 … 11 (2n единиц) – составное.

**Задача 44:** Докажите, что число – составное.

**Задача 45:** Пусть a, b, c, d – различные цифры. Докажите, что не делится на .

**Задача 46:** A – шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что A не делится на 11.

**Задача 47:** Докажите, что разность числа, имеющего нечетное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

**Задача 48:** Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

**Задача 49:** Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число также делится на 7.

**Задача 50:** Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

**Задача 51:** а) Дано шестизначное число , причем делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.

в) Сформулируйте и докажите признак делимости на 13.

**Задача 52:** а) Дано шестизначное число , причем делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.

**Задача 53:**

Существует ли такое трехзначное число , что является квадратом натурального числа?

**Задача 54:** Найдите наименьшее число, записываемое одними единицами, делящееся на 333 … 33 (в записи 100 троек).

**Задача 55:** Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел оканчиваться на 1989?

**Задача 56:**

Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

**Задача 57:** Между цифрами двузначного числа, кратного трем, вставили нуль, и к полученному трехзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число, в 9 раз большее первоначального. Найдите исходное число.

**Задача 58:** Найдите четырехзначное число, являющееся точным квадратом, первые две цифры которого равны между собой и последние две цифры которого также равны между собой.

**Задача 59:** Найдите все трехзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

**Задача 60:** К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

**Задача 61:** Докажите, что все числа ряда 10001,100010001,1000100010001, …  являются составными.1.

**Задача 1:**
а) a + 1 делится на 3. Докажите, что 4 + 7a делится на 3.

б) 2 + a и 35 – b делятся на 11. Докажите, что a + b делится на 11.
 **Задача 2:** Найдите последнюю цифру числа 1? + 2? + … + 99?.

**Задача 3:** Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

**Задача 4:** Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.

**Задача 5:** Докажите, что если (n – 1)! + 1 делится на n, то n – простое число.

**Задача 6:** Докажите, что существует такое натуральное n, что числа n + 1, n + 2, …, n + 1989 – составные.

**Задача 7:**Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

**Задача 17:** Докажите, что при x ≥ 0.

**Задача 18:** Докажите, что x + 1/x ≥ 2 при x > 0.

**Задача 19:** Докажите, что (x² + y²)/2 ≥ xy при любых x и y.

**Задача 20:** Докажите, что 2(x² + y²) ≥ (x + y)² при любых x и y.

**Задача 21:** Докажите, что 1/x + 1/y ≥ 4/(x + y) при x,y > 0.

**Задача 22:** Докажите, что x² + y² + z² ≥ xy + yz + zx при любых x, y, z.

**Задача 23:** a, b, c ≥ 0. Докажите, что (a + b)(a + c)(b + c) ≥ 8abc.

**Задача 24:** a, b, c ≥ 0. Докажите, что .

**Задача 25:** Докажите, что x² + y² + 1 ≥ xy + x + y при любых x и y.

**Задача 26:** Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство: a4 + b4 + c4 ≥ abc(a + b + c).

**Задача 27:** Докажите, что x4 + y4 + 8 ≥ 8xy при любых x и y.

**Задача 28:** a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что



**Задача 29:** a, b, c – положительные числа. Докажите, что 

**Задача 30:** Докажите, что при x ≥ 0 имеет место неравенство 3x³ – 6x² + 4 ≥ 0.

**Задача 31:** Докажите, что при a, b, c > 0 имеет место неравенство .

**Задача 32:** Докажите, что при a, b, c > 0 имеет место неравенство ab/c + ac/b + bc/a ≥ a + b + c.

**Задача 33:** Докажите, что при a, b, c ≥ 0 имеет место неравенство ((a + b + c)/3)² ≥ (ab + bc + ca)/3.

**Задача 34:** Докажите, что при a, b, c ≥ 0 имеет место неравенство (ab + bc + ca)² ≥ 3abc(a + b + c).

**Задача 35:** Сумма трех положительных чисел равна шести. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

**Задача 36:** Докажите, что при x ≥ 0 имеет место неравенство .

**Задача 37:** Сумма двух неотрицательных чисел равна 10. Какое максимальное и какое минимальное значение может принимать сумма их квадратов?

**Задача 38:** Докажите неравенство Коши для пяти чисел, т.е. докажите, что при a, b, c, d, e ≥ 0 имеет место неравенство



**Делимость целых чисел и остатки**

Задачи с решениями

1. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Решение

Вычёркиваем из 999 чисел, меньших 1000, числа, кратные 5: их [999/5]=199. Далее вычёркиваем числа, кратные 7: их [999/7]=142. Но среди чисел, кратных 7, имеется [999/35]=28 чисел, одновременно кратных 5; они будут вычеркнуты дважды. Итого, нами должно быть вычеркнуто 199+142–28=313 чисел. Остаётся 999–313=686.

Ответ: 686 чисел.

2. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

Решение Если счастливый билет имеет номер А, то билет с номером В=999999–А также счастливый, при этом А и В различны. Поскольку А+В=999999=1001·999=13·77·99 делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

3. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

Решение Любое целое число при делении на 8 имеет остатком одно из следующих восьми чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, поэтому квадрат целого числа имеет остатком при делении на 8 одно из трёх чисел 0, 1, 4. Чтобы при делении на 8 сумма квадратов трёх чисел имела остаток 7, необходимо, чтобы выполнялся один из двух случаев: либо один из квадратов, либо все три при делении на 8 имеют нечётные остатки.

В первом случае нечётный остаток есть 1, а сумма двух чётных остатков равна 0, 2, 4, то есть сумма всех остатков равна 1, 3, 5. Остатка 7 в этом случае получить нельзя. Во втором случае три нечётных остатка это три 1, и остаток всей суммы равен 3. Итак, 7 не может быть остатком при делении на 8 суммы квадратов трёх целых чисел.

 4. Докажите, что при любом натуральном n:

  а) число 55n+1 + 45n+2 + 35n делится на 11.

  б) число 25n+3 + 5n·3n+2 делится на 17.

Решение а) Первоначально выполним следующее преобразование заданного выражения:

  55n+1+45n+2+35n = 5(3125)n + 16(1024)n + (243)n = 5(11·284+1)n + 16(11·93+1)n + (11·22+1)n.

Принимая во внимание бином Ньютона n-й степени, можно записать: (х+1)n = Ах+1, где А – некоторое целое число при целых х. Тогда приведённое выше выражение принимает вид 11В+5+16+1 = 11С, очевидно делящееся на 11, где В и С – некоторые целые числа.

б) Выполним следующие преобразования, из которых следует доказываемое утверждение:

  25n+3 + 5n·3n+2 = 8·32n + 9·15n = 8(17+15) n + 9·15n = 17А + 8·15n + 9·15n = 17А + 17·15n = 17В,

где А, В – целые положительные числа.

5. Докажите, что:

  а) если х2+у2 делится на 3 и числа х, у целые, то х и у делятся на 3;

  б) если сумма трёх целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих чисел делится на 6;

  в) если p и q простые числа и p>3, q>3, то p2–q2 делится на 24;

  г) если a, b, c – любые целые числа, то найдутся такие взаимно простые k и t, что ak+bt делится на c.

Решение а) Пусть х=3а+r1, у=3b+r2, где r1 и r2 – остатки от деления на 3, то есть какие-то из чисел 0, 1, 2. Тогда х2+у2=3(3а2+3b2+2аr1+2br2)+(r1)2+(r2)2. Так как х2+у2 делится на 3, первое слагаемое последней суммы делится на 3, то (r1)2+(r2)2 делится на 3, что возможно, с учётом вышесказанного, только при r1=r2=0.

Таким образом, х=3а и у=3b, то есть х и у делятся на 3, что и требовалось доказать.

 б) Достаточно показать, что x3+y3+z3–(x+y+z) делится на 6. Это так и есть, ведь каждое из слагаемых x3–x, y3–y и z3–z делится на 6, поскольку а3–а=а(а–1)(а+1) – произведение трёх последовательных целых чисел, которое обязательно делится на 2, 3, а, значит, и 6.

 в) Кратность p2–q2 числу 3 можно доказать так. При делении на 3 квадраты целых чисел дают остатки 0 или 1. Так как p и q простые числа больше 3, то это p2 и q2 при делении на 3 имеют одинаковые остатки – единицу. Тогда p2–q2 делится на 3.

С другой стороны, p2–q2=(p+q)(p–q). Так как p и q нечётные и при делении на 4 имеют остатки 1 или 3, то выражение в одних скобках делится на 4, а в других – на 2, а разность квадратов p и q – на 8.

Так как p2–q2 делится на взаимно простые числа 3 и 8, то p2–q2 делится на 3·8=24, что и требовалось доказать.

 г) Пусть наибольший общий делитель чисел b и c–a равен d, b=k·d и c–a=t·d. Тогда числа k и t взаимно просты.

Далее, а·k+b·t=a·b/d+(c–a) ·b/d=c·k.

Итак, a·k+b·t делится на c.

 6. Найдите:

  а) наибольший общий делитель чисел 2n+3 и n+7;

  б) все пары натуральных чисел х, у таких, что 2х+1 делится на у и 2у+1 делится на х;

  в) все целые k, для которых k5+3 делится на k2+1;

  г) хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел n, n+1, n+2, ... , n+20 имеет с числом 30030=2·3·5·7·11·13 общий делитель, больший единицы.

Решение а) Заметим, что если m > n, то НОД (m; n) = НОД (m – n; n).

Иначе говоря, наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен наибольшему общему делителю модуля их разности и меньшего числа. Легко доказать это свойство.

Пусть k – общий делитель m u n (m > n). Это значит, что m = ak, n = bk, где a, b – натуральные числа, причем a > b. Тогда m – n = k(a – b), откуда следует, что k – делитель числа m – n. Значит, все общие делители чисел m и n являются делителями их разности m – n, в том числе и наибольший общий делитель.

Воспользуемся вышесказанным:

  НОД (2n+3; n+7) = НОД (n+7; 2n+3 – (n+7)) = НОД (n+7; n–4) = НОД (n–4; 11).

Так как 11 – простое число, то искомый наибольший общий делитель равен 1 либо 11. Если n–4 = 11d, то есть n = 4+11d, то наибольший общий делитель равен 11, в противном случае – 1.

Ответ: НОД (2n+3; n+7) = 11, при n равных 4+11d; НОД (2n+3; n+7) = 1, при n не равных 4+11d.

 б) Число 2х+1 нечётное и делится на у, поэтому у тоже нечётное. Аналогично х – нечётное.

Числа х и у взаимно простые. Действительно, пусть k – общий делитель х и у, тогда 2х делится на k, и (2х+1) тоже делится на k (k – делитель у, а у – делитель 2х+1). Значит, 1 делится на k, то есть k=1.

Число 2х+2у+1 делится и на х и на у, а значит, – на ху. Тогда 2х+2у+1 не меньше ху.

Пусть х < у или х = у, тога либо 2х+2у+1 < 5у, либо х = у = 1. В обох случаях ху < 5у, значит, х < 5. Поэтому х=1 и 2х+1=3 делится на у или х=3 и 2х+1=7 делится на у.

Ответ: (1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 7), (7; 3).

 в) Так как k5+3 = (k3–k)( k2+1) + (k+3), то k5+3 делится на k2+1, если k+3 делится на k2+1. Когда это возможно? Рассмотрим варианты:

  1) k+3 = 0, а значит k = –3;

  2) k+3 = k2+1; решая, находим k = –1, k = 2;

  3) проверим целые k при которых k+3 > k2+1; после проверки: k = 0, k = 1.

 Ответ: –3, –1, 0, 1, 2.

 г) пусть m = 2·3·5·7·k. Подбирая k так, чтобы m–1 делилось на 11, а m+1 – на 13, получим, что число n = m–10 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: например,9440.

1. Существует ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого каждая цифра встречается по одному разу?

Решение

I способ. Выписывая трёхзначные числа, делящиеся на 11, можно среди них найти три числа, в записи которых участвуют все цифры от 0 до 9. Например, 275, 396,418. С их помощью можно составить десятизначное число, делящееся на 11. Например:

  2753964180 = 275·107 + 396·107 + 418·10 = 11·(25·107 + 36·104 + 38·10).

II способ. Для нахождения требуемого числа воспользуемся признаком делимости на 11, согласно которому числа n=a1a2a3…a10 (в данном случае аi не множители, а цифры в записи числа n) и S(n)=a1–a2+a3–…–a10 одновременно делятся на 11.

Пусть А – сумма цифр, входящая в S(n) со знаком «+», В – сумма цифр, входящая в S(n) со знаком «–». Число А–В, согласно условию задачи, должно делиться на 11. Положим В–А=11, кроме того, очевидно, А+В=1+2+3+…+9=45. Решая полученную систему В–А=11, А+В=45, находим, А=17, В=28. Подберём группу из пяти различных цифр с суммой 17. Например, 1+2+3+5+6=17. Эти цифры возьмём в качестве цифр с нечётными номерами. В качестве цифр с чётными номерами возьмём оставшиеся – 4, 7, 8, 9, 0.

Мы видим, что условию задачи удовлетворяет, например, число 1427385960.

 8. Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырёхзначное число, которое делится на их произведение. Найти эти числа.

Решение Пусть a и b – два двузначных числа, тогда 100a+b – четырёхзначное число. По условию 100a+b = k·ab, отсюда b = a(kb–100), то есть b делится на a.

Итак, b = ma, но a и b двузначные числа, поэтому m однозначное.

Так как 100a+b = 100a+ ma = а(100+m) и 100a+b = kab, то а(100+m) = kab,

то есть 100+m = kb или 100+m = kma, откуда 100 = m(ka–1).

Таким образом, m – делитель числа 100, кроме того, m – однозначное число, значит, m = 1, 2, 4, 5.

Так как ka = 1+100/m, причём а двузначно, то отпадают для m значения 1 и 5, ибо

при m = 1 число 100/1+1 = 101 не делится ни на какое двузначное число а;

при m = 5 число 100/5+1 = 21 и имеем а=21, при котором b = ma = 5·21 – трёхзначное число.

При m = 2 имеем, ka = 51, a = 17, b = 17·2 = 34;

при m = 4 имеем, ka = 26, a = 13, b = 13·4 = 52.

Ответ: 17 и 34, 13 и 52.

 9. Докажите, что при любых натуральных k и n число 12k+1 + 22k+1 + . . . + n2k+1 не делится на n + 2.

Решение Воспользуемся тем, что сумма одинаковых нечётных степеней двух чисел делится на сумму этих чисел, что следует из [известного алгебраического тождества](http://math4school.ru/algebraicheskie_tozhdestva.html#spr1023). Можно записать:

  22k+1 + n2k+1 = (2 + n)·А1,

  32k+1 + (n – 1)2k+1 = (3 + (n – 1))·А2 = (2 + n)·А2,

  42k+1 + (n – 2)2k+1 = (4 + (n – 2))·А3 = (2 + n)·А3 и так далее, где Аi – некоторые целые числа.

В зависимости от чётности n возможна нехватка числа для образования последней пары, избежать этого позволит умножение на 2, рассматриваемой в условии суммы. Итак,

  2(12k+1 + 22k+1 +...+n 2k+1) = 2·12k+1 + (22k+1 + n2k+1) + (32k+1 + (n – 1)2k+1) +...+ (n2k+1 + 22k+1) =

  = 2 + (n + 2)·А, где А – некоторое целое число.

Одно из слагаемых последней суммы делится на n + 2, другое при любых натуральных n – нет. Итак, рассматриваемая в условии сумма не делится на n при любых натуральных n и k.

 10. Докажите, что для любого простого числа р > 2 числитель m дроби



делится на p.

Решение

Заметим, что число р–1 чётное, и преобразуем дробь m/n к виду



Приводя полученное выражение к общему знаменателю



получаем соотношение



из которого вытекает равенство m(p–1)!=pqn. Поскольку ни одно из чисел 1, 2, 3, … , р–1 не делится на простое число р, то последнее равенство возможно лишь в случае, если m делится на р, что и требовалось доказать.

**Задача 24:** Докажите, что любое натуральное число сравнимо со своей последней цифрой по модулю а) 10; б) 2; в) 5.

**Решение:** Вычтем из числа его последнюю цифру и получим число, оканчивающееся нулем, т.е. делящееся на 10 (а значит, и на 5, и на 2).

**Задача 25:** Докажите, что .

**Решение:** Указание: все степени десяти, начиная со 100, делятся на 4.

**Задача 26:** Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2n и 5n.

**Решение:** Число делится на 2n (на 5n) тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на 2n (на 5n).

**Задача 27:** Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечетна.

**Решение:** Так как последняя цифра 6, то возводимое в квадрат число четно. Раз оно является квадратом, то оно делится и на 4. Следовательно, число, составленное из двух его последних цифр, должно делиться на 4. Все требуемые двузначные числа легко выписать: 16, 36, 56, 76, 96.

**Задача 28:** Предпоследняя цифра квадрата натурального числа – нечетная. Докажите, что его последняя цифра 6.

**Решение:** Две последние цифры квадрата числа n зависят только от двух последних цифр числа n. Пусть . Тогда . Ясно, что цифра десятков числа b² должна быть нечетной. Прямой перебор показывает, что цифра единиц должна тогда быть равной 6.

**Задача 29:** Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

**Решение:** Рассмотрите остатки по модулю 16.

**Задача 30:** Найдите 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр.

**Решение:** Подберем число так, чтобы сумма его цифр равнялась 125. Делимость числа на 125 определяется тремя его последними цифрами. Следовательно, годится число 111 … 11599125 (в начале записи единица написана 94 раза).

**Задача 31:** Докажите, что любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр по модулю а) 3; б) 9.

**Решение:** Рассмотрим число



Ясно, что 10 ≡ 1 (mod %)%9. Поэтому 10k ≡ 1 (mod 9) для любого натурального k. Таким образом, a110n – 1 + a210n – 2 +  …  + an – 110¹ + an ≡ a1 + a2 +  …  + an (mod %)%9. Рассуждения для числа 3 совершенно аналогичны.

**Задача 32:** Можно ли записать точный квадрат, использовав по 10 раз цифры а) 2, 3, 6; б) 1, 2, 3 ?

**Решение:** а) нет; б) нет. Рассмотрите остатки по модулю 9.

**Задача 33:** У числа 2¹ºº нашли сумму цифр, у результата снова нашли сумму цифр и т.д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

**Решение:** 7.

**Задача 34:** Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

**Решение:** Эти числа имеют одинаковые суммы цифр и, значит, одинаковые остатки по модулю 9.

**Задача 35:** К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

**Решение:** Это можно сделать шестью способами: 1155, 4155, 7155, 3150, 6150, 9150.

**Задача 36:** Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них – 97?

**Решение:** Два числа: 6975, 2970.

**Задача 37:** Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

**Решение:** Это число 1023457896.

**Задача 38:** Докажите, что произведение последней цифры числа 2n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

**Решение:** Разберите два случая: последняя цифра равна или не равна 6.

**Задача 39:** Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

**Решение:** Нет. Рассмотрите остатки по модулю 3.

**Задача 40:** Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

**Решение:** 7.

**Задача 41:** Пусть A – сумма цифр числа 44444444, а B – сумма цифр числа A. Найдите сумму цифр числа B.

**Решение:** 7.

**Задача 42:** Докажите, что



**Решение:** Указание: 10 ≡  – 1 (mod 11).

**Задача 43:** Докажите, что число 111 … 11 (2n единиц) – составное.

**Решение:** Это число делится на 11.

**Задача 44:** Докажите, что число – составное.

**Решение:** Это число делится на 11.

**Задача 45:** Пусть a, b, c, d – различные цифры. Докажите, что не делится на .

**Решение:** делится на 11, а – нет.

**Задача 46:** A – шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что A не делится на 11.

**Решение:** Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 нельзя разбить на две тройки, разность сумм в которых делится на 11.

**Задача 47:** Докажите, что разность числа, имеющего нечетное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

**Решение:** Эти два числа имеют одинаковые остатки как при делении на 9, так и при делении на 11.

**Задача 48:** Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

**Решение:** Нельзя. Проследите за последней цифрой.

**Задача 49:** Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число также делится на 7.

**Решение:** .

**Задача 50:** Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

**Решение:** , так как 2(a + b + c) ≡ 0 (mod 7). Значит, делится на 7 тогда и только тогда, когда b – c делится на 7. Но так как b, c < 7, то это условие равносильно тому, что b = c.

**Задача 51:** а) Дано шестизначное число , причем делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.

в) Сформулируйте и докажите признак делимости на 13.

**Решение:** а) , так как 1001 делится на 7.

б), в) Число делится на 7 (13) тогда и только тогда, когда на 7 (13) делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. Пример: 10345678. Образуем знакопеременную сумму: 678 – 345 + 10 = 343 – делится на 7. Значит, и исходное число делится на 7. И в самом деле, оно равно 7 • 1477954.

**Задача 52:** а) Дано шестизначное число , причем делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.

**Решение:** Число делится на 37 тогда и только тогда, когда сумма чисел, образованных тройками последовательных цифр данного числа, должна делиться на 37.

**Задача 53:** Существует ли такое трехзначное число , что является квадратом натурального числа?

**Решение:** Нет, не существует. , где a и c – разные цифры.

**Задача 54:** Найдите наименьшее число, записываемое одними единицами, делящееся на 333 … 33 (в записи 100 троек).

**Решение:** Запись этого числа состоит из 300 единиц.

**Задача 55:** Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел оканчиваться на 1989?

**Решение:** Нет. Рассмотрите остатки по модулю 5.

**Задача 56:** Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

**Решение:** Запишем наше число в виде 10a + b, где b – цифра единиц. Получим уравнение 100a + b = 9(10a + b). Отсюда 10a = 8b, т.е. 5a = 4b. Таким образом, b делится на 5. Рассмотрев два случая b = 0, b = 5, получаем единственный ответ: 45.

**Задача 57:** Между цифрами двузначного числа, кратного трем, вставили нуль, и к полученному трехзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число, в 9 раз большее первоначального. Найдите исходное число.

**Решение:** 69.

**Задача 58:** Найдите четырехзначное число, являющееся точным квадратом, первые две цифры которого равны между собой и последние две цифры которого также равны между собой.

**Решение:** 7744 = 88².

**Задача 59:** Найдите все трехзначные числа, каждая натуральная степень которых оканчивается на три цифры, составляющие первоначальное число.

**Решение:** 625 и 376.

**Задача 60:** К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

**Решение:** Рассмотрите остатки по модулю 7.

**Задача 61:** Докажите, что все числа ряда 10001,100010001,1000100010001, …  являются составными.

**Решение:** Домножьте число на 1111 и докажите, что результат делится на число вида 1000 …001.

**Задача 1:**
а) a + 1 делится на 3. Докажите, что 4 + 7a делится на 3.

б) 2 + a и 35 – b делятся на 11. Докажите, что a + b делится на 11.

Решение:
Указания: а) 4 + 7a = 4(a + 1) + 3a; б) a + b = (2 + a) – (35 – b) + 33.

**Задача 2:** Найдите последнюю цифру числа 1? + 2? + … + 99?.

Решение: 0

**Задача 3:** Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Решение: Докажите, что любые два числа из этих семи дают одинаковый остаток от деления на 5. Для этого рассмотрите две шестерки: одну – не содержащую первое из них, вторую – не содержащую второе.

**Задача 4:**

Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.
Решение: Заметим, что это число, увеличенное на 1, делится на 2, 3, 4, 5, 6. Ответ: 59.

**Задача 5:** Докажите, что если (n – 1)! + 1 делится на n, то n – простое число.

Решение: Если n – составное число (n > 4), то (n – 1)! делится на n.

**Задача 6:** Докажите, что существует такое натуральное n, что числа n + 1, n + 2, …, n + 1989 – составные.

Решение: Попробуем рассказать, как можно придти к решению. Число n + 1 должно быть составным. Попытаемся пойти по самому простому пути: сделаем так, чтобы n + 1 делилось на 2. n + 2 также должно быть составным, но делиться на 2 уже не может. Попытаемся опять пойти по самому простому пути: хотелось бы сделать так, чтобы n + 2 делилось на 3. Продолжая в том же духе, можно пытаться найти число n такое, что n + 1 делится на 2, n + 2 – на 3, n + 3 – на 4 и так далее. Это равносильно тому, что n – 1 делится на 2, 3, 4, …, 1990. Такое число, конечно, существует – например, 1990!. Итак, в качестве искомого n можно взять число 1990! + 1.

**Задача 7:** Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

Решение: Предположим противное. Пусть p1, p2, …, pn – все простые числа. Рассмотрим число p1p2 … pn + 1. Это число не делится ни на одно из чисел p1, p2, …, pn и, следовательно, не может быть разложено в произведение простых. Противоречие.

**Задача 17:** Докажите, что при x ≥ 0.

**Решение:** .

**Задача 18:** Докажите, что x + 1/x ≥ 2 при x > 0.

**Решение:** , ч.т.д.

**Задача 19:** Докажите, что (x² + y²)/2 ≥ xy при любых x и y.

**Решение:** Перегруппировав члены, получаем (x – y)² ≥ 0.

**Задача 20:** Докажите, что 2(x² + y²) ≥ (x + y)² при любых x и y.

**Решение:** Перегруппировав члены, получаем (x – y)² ≥ 0.

**Задача 21:** Докажите, что 1/x + 1/y ≥ 4/(x + y) при x,y > 0.

**Решение:** Приводим к общему знаменателю и получаем (x – y)² ≥ 0.

**Задача 22:** Докажите, что x² + y² + z² ≥ xy + yz + zx при любых x, y, z.

**Решение:** Запишем три неравенства:



Сложив их, мы и получим требуемое неравенство.

**Задача 23:** a, b, c ≥ 0. Докажите, что (a + b)(a + c)(b + c) ≥ 8abc.

**Решение:** Надо перемножить три неравенства: , , .

**Задача 24:** a, b, c ≥ 0. Докажите, что .

**Решение:** .

**Задача 25:** Докажите, что x² + y² + 1 ≥ xy + x + y при любых x и y.

**Решение:** x² + y² + 1 – xy – x – y = ((x – y)² + (x – 1)² + (y – 1)²)/2 ≥ 0.

**Задача 26:** Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство: a4 + b4 + c4 ≥ abc(a + b + c).

**Решение:** Воспользуемся неравенством x² + y² + z² ≥ xy + yz + zx, причем дважды:



**Задача 27:** Докажите, что x4 + y4 + 8 ≥ 8xy при любых x и y.

**Решение:** .

**Задача 28:** a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что



**Решение:** ; . Осталось лишь перемножить неравенства.

**Задача 29:** a, b, c – положительные числа. Докажите, что



**Решение:** .

**Задача 30:** Докажите, что при x ≥ 0 имеет место неравенство 3x³ – 6x² + 4 ≥ 0.

**Решение:** Докажем, что 3x³ + 4 ≥ 6x². Но 3x³ + 4 = 2x³ + x³ + 4. Применяя неравенство Коши, получаем



**Задача 31:** Докажите, что при a, b, c > 0 имеет место неравенство .

**Задача 32:** Докажите, что при a, b, c > 0 имеет место неравенство ab/c + ac/b + bc/a ≥ a + b + c.

**Задача 33:** Докажите, что при a, b, c ≥ 0 имеет место неравенство ((a + b + c)/3)² ≥ (ab + bc + ca)/3.

**Задача 34:** Докажите, что при a, b, c ≥ 0 имеет место неравенство (ab + bc + ca)² ≥ 3abc(a + b + c).

**Задача 35:** Сумма трех положительных чисел равна шести. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

**Задача 36:** Докажите, что при x ≥ 0 имеет место неравенство .

**Задача 37:**

Сумма двух неотрицательных чисел равна 10. Какое максимальное и какое минимальное значение может принимать сумма их квадратов?

**Задача 38:** Докажите неравенство Коши для пяти чисел, т.е. докажите, что при a, b, c, d, e ≥ 0 имеет место неравенство



**Решение:** Указание. Докажите сначала неравенство Коши для восьми чисел, а затем воспользуйтесь той же идеей, что и при доказательстве неравенства Коши для трех чисел.