Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Стереометрия

Задание №5 для 11-х классов

(2010 – 2011 учебный год)

г. Долгопрудный, 2011

Составитель: А.С. Кочерова, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 11-х классов (2010 – 2011 учебный год). – М.: МФТИ, 2011, 32с.

Составитель:
Кочерова Анна Сергеевна
Подписано 12.01.11. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 1100. Заказ №5-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико-техническом институте
(государственном университете)

ООО «Печатный салон ШАНС»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-51-45 – заочное отделение
тел/факс (498) 744-63-51 – очно-заочное отделение
тел. (498) 744-65-83 – очное отделение

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Векторы в пространстве

Особенность понятия *вектор* заключается в том, что все определения и теоремы, связанные с векторами, почти дословно переносятся на пространственный случай. Рекомендуем вам освежить в памяти соответствующий раздел планиметрии.

Напомним, что

1. Отрезок, концы которого упорядочены, называется *направленным отрезком* или *вектором.* В трёхмерном пространстве вектор имеет три координаты: если в прямоугольной декартовой системе координат точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$ – его начало, а точка $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – его конец, то координатами вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ называют числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Это записывается так $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

2. Сумма векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и произведение вектора $\vec{a}$ на число λ определяются аналогично двумерному случаю: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ и $\lambda\vec{a} = \vec{d}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, и сохраняются все свойства этих операций.

3. Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор по определению считается коллинеарным любому другому. *Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

4. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то для любого вектора $\vec{n}$, лежащего в одной плоскости с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, существует единственная пара чисел x и y таких, что $\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (*теорема о разложении*).

5. *Базисом* на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

6. Три вектора называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны, в частности, если хотя бы один из них нулевой. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда существуют числа x и y такие, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.*

7. *Базисом* в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

8. Если векторы базиса перпендикулярны (или, как говорят, ортогональны), а их длины равны единице, то базис называется *ортонормированным*. Если в пространстве выбрать начало – точку O, от неё отло-

жить векторы ортонормированного базиса, вдоль них направить координатные оси и занумеровать их, т. е. назвать первую осью Ox, вторую – осью Oy, третью – осью Oz, то получим известную вам декартову прямоугольную систему координат.

9. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то для любого вектора $\vec{d}$ существует единственная тройка действительных чисел x, y и z таких, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, при этом x, y и z называются координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

10. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если один из векторов нулевой, то угол между ними не определён, а скалярное произведение по определению считают равным нулю. В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ определяется равенством $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. (Требование ортонормированности базиса очень существенно. В произвольном базисе выражение для скалярного произведения гораздо сложнее).

11. *Длина вектора* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, в ортонормированном базисе: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

12. Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны или хотя бы один из них нулевой.

13. Из определения скалярного произведения можно выписать выражение для косинуса угла между векторами $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, а в ортонормированном базисе $\cos\varphi = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

§2. Угол между прямыми

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из плоских углов, образованных этими прямыми.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым.

Угол между параллельными прямыми по определению полагается равным нулю.

Угол между прямыми изменяется от 0° до 90°.

Поскольку косинус угла между прямыми неотрицательный (угол острый или прямой), то он равен модулю косинуса угла между векторами, направленными вдоль данных прямых, а именно,

$$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right|,$$

где $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ – любые векторы, направленные вдоль данных прямых.

● **Задача 1.** Точка K – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BK и AD_1.

Δ Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A, как показано на рис. 1,

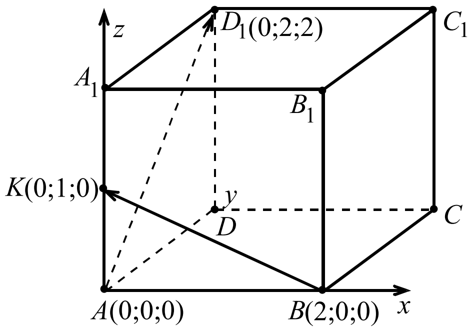


Рис. 1

за единицу длины примем длину отрезка AK. Определяем координаты точек B, K, D_1 и находим координаты векторов $\overrightarrow{BK}$ и $\overrightarrow{AD_1}$:

$$B(2,0,0),\ K(0,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{BK} = (-2,1,0);$$

$$A(0,0,0),\ D_1(0,2,2) \Rightarrow \overrightarrow{AD_1} = (0,2,2).$$

Если α – угол между прямыми BK и AD_1, то

$$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{\left|\overrightarrow{BK}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD_1}\right|}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

Значит угол между прямыми равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. ▲

Если в задаче речь идёт о прямоугольном параллелепипеде или кубе, то удобно ввести прямоугольную систему координат вдоль рёбер и посчитать так, как мы это сделали в предыдущей задаче. Но если это сделать неудобно, например, в задаче дан тетраэдр, то лучше воспользоваться векторным методом.

● **Задача 2.** В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N – середины рёбер AB и CD. Найти угол между прямыми MN и BC.

Δ Введём базис $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$ (рис. 2). Тогда

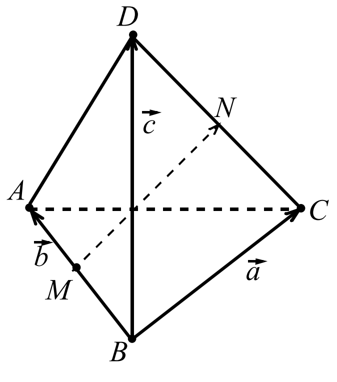


Рис. 2

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{\vec{b}}{2} + (\vec{c} - \vec{a}) + \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2} =$$

$= \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$. Если α – угол между прямыми MN и BC, то $\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$.

Т. к. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)\cdot\vec{a} =$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + a^2 + a^2 - 2\frac{a^2}{2} + 2\frac{a^2}{2} - 2\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2},$$

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = a$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. ▲

Задачи на нахождение угла между прямыми могут быть решены и чисто геометрически. Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми a и b, выбирают какую-нибудь точку C и проводят через неё прямые a' и b', соответственно параллельные a и b. Искомый угол будет равен углу между пересекающимися прямыми a' и b'.

● **Задача 3.** В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямыми AB_1 и CD_1.

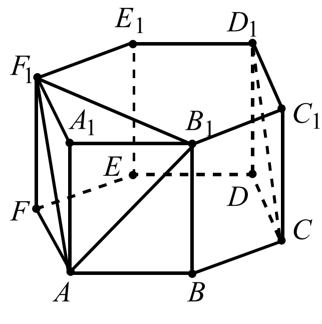


Рис. 3

Δ Заметим, что прямая AF_1 параллельна прямой CD_1 (см. рис. 3) и, следовательно, искомый угол равен углу B_1AF_1. В треугольнике B_1AF_1 $AB_1 = AF_1 = \sqrt{2}$, $B_1F_1 = \sqrt{3}$. По теореме косинусов получаем, что косинус искомого угла равен $\frac{1}{4}$, поэтому сам угол равен $\arccos\frac{1}{4}$. ▲

§3. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

● **Задача 4.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 1$, $AD = 2$, $AA_1 = 2$. Точка M – середина диагонали AD_1 грани AA_1D_1D. Найдите расстояние от точки M до прямой BD_1.

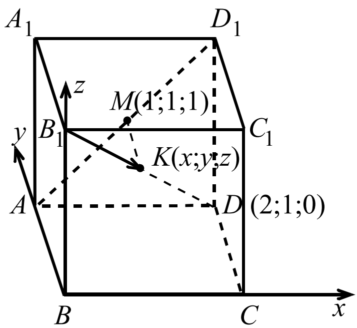


Рис. 4

Δ Введём систему координат, как показано на рис. 4. Предположим, что точка K лежит на прямой B_1D и $MK \perp B_1D$. Требуется найти длину отрезка MK. Пусть $(x;\ y;\ z)$ – координаты точки K. Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{B_1D}$, т. е. $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$.

Имеем: $B_1(0;0;2)$, $D(2;1;0)$, $\overrightarrow{B_1K}$ $(x;\ y;\ z-2)$ и $\overrightarrow{BD}$ $(2;\ 1;\ -2)$. Из равенства, $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$, т. е. $(x;\ y;\ -2) = \lambda(2;\ 1;\ -2)$ следует $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z - 2 = 2\lambda$. Вектор $\overrightarrow{MK}$ $(x-1;\ y-1;\ z-1)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{B_1D}$ $(2;\ 1;\ -2)$, их скалярное произведение равно нулю, поэтому

$$2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0.$$

Подставляем сюда $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2 - 2\lambda$, находим, $\lambda = \frac{5}{9}$, тогда $K\left(\frac{10}{9};\frac{5}{9};\frac{8}{9}\right)$ и координаты вектора $\overrightarrow{MK}$ таковы: $x-1 = 2\lambda - 1 = \frac{1}{9}$, $y-1 = \lambda - 1 = -\frac{4}{9}$, $z-1 = 2-2\lambda-1 = 1-2\lambda = -\frac{1}{9}$, $\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{9};-\frac{4}{9};-\frac{1}{9}\right)$.

Определим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, т. е. расстояние от точки M до прямой B_1D: $\left|\overrightarrow{MK}\right| = MK = \sqrt{\dfrac{16+1+1}{81}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Заметим, что также определено и положение точки K, известны её координаты и, например, можно найти $B_1K : B_1D = \dfrac{5}{9}$. ▲

● Геометрический подход к нахождению расстояния от точки A до прямой a состоит в том, чтобы найти основание A' перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a. Если точка A' находится вне участка прямой a, данного в задаче, то через точку A проводят прямую c, параллельную a, и выбирают на ней более удобную точку C, ортогональная проекция которой C' принадлежит данному участку прямой a.

Задача 5. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки B до прямой AF_1.

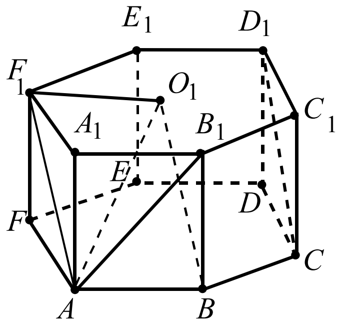


Рис. 5

Δ Пусть O_1 – центр верхнего основания призмы (рис. 5). Прямая BO_1 параллельна прямой AF_1 и, следовательно, расстояние от точки B до прямой AF_1 равно расстоянию от точки O_1 до прямой AF_1. В треугольнике AO_1F_1 имеем $AO_1 = AF_1 = \sqrt{2}$, $O_1F_1 = 1$. По теореме Пифагора находим, что высота этого треугольника, опущенная на сторону O_1F_1, равна $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Запишем формулу площади этого треугольника двумя способами $\sqrt{2}\cdot h = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, где h – высота, опущенная на AF_1. Следовательно, искомое расстояние равно $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. ▲

§4. Расстояние от точки до плоскости

●Любая плоскость в декартовой системе координат может быть задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля. Пусть дана точка $M(x_0; y_0; z_0)$, найдём расстояние от неё до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пусть прямая, проходящая через точку M перпендикулярно плоскости α, пересекает её в точке K с координатами (x; y; z). Вектор $\overrightarrow{MK}$ перпендикулярен плоскости α, как и вектор $\vec{n}$ (A; B; C), т. е. векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, $\overrightarrow{MK} = \lambda\vec{n}$.

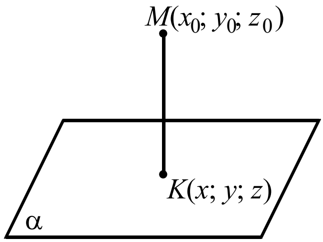


Рис. 6

Так как $\overrightarrow{MK}$ $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и $\vec{n}$ (A,B,C), то $x - x_0 = \lambda A$, $y - y_0 = \lambda B$, $z - z_0 = \lambda C$.

Точка K лежит в плоскости α (рис. 6), её координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляем $x = x_0 + \lambda A$, $y = y_0 + \lambda B$, $z = z_0 + \lambda C$ в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, получаем

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0,$$

откуда $\lambda = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.

Находим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, которая и равна расстоянию от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\lambda\vec{n}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Итак, расстояние h от точки M $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ таково

$$h = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

●При геометрическом способе нахождения расстояния от точки A до плоскости α находят основание перпендикуляра AA', опущенного из точки A на плоскость α. Если точка A' находится вне участка плоскости α, указанного в задаче, то через точку A проводят прямую c, параллельную плоскости α, и выбирают на ней более удобную точку C, ортогональная проекция которой C' принадлежит данному участку плоскости α. Длина отрезка CC' будет равна искомому расстоянию от точки A до плоскости α.

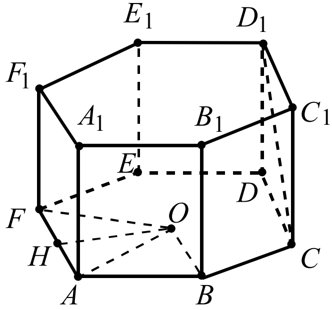


Рис. 7

Задача 6. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все рёбра которой равны 1, найти расстояние от точки B до плоскости AFF_1.

△ Пусть O – центр нижнего основания призмы (рис. 7). Прямая BO параллельна прямой AF и, следовательно, расстояние от точки B до плоскости AFF_1 равно расстоянию OH от точки O до плоскости AFF_1. В треугольнике AOF имеем $AO=OF=AF=1$. Высота OH этого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

●Укажем ещё один способ (*метод вспомогательного объёма*) нахождения расстояния от точки до плоскости. Известно, что объём пирамиды V, площадь её основания S и длина высоты h связаны формулой $h=\frac{3V}{S}$. Но длина высоты пирамиды есть не что иное, как расстояние от её вершины до плоскости основания. Следовательно, для вычисления расстояния от точки до плоскости достаточно найти объём и площадь основания какой-нибудь пирамиды с вершиной в этой точке и с основанием, лежащим в данной плоскости.

Задача 7. Дана правильная призма $A..D_1$, в которой $AB=a$, $AA_1=2a$. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей основания $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.

△ Рассмотрим тетраэдр O_1DBC_1 (рис. 8). Искомое расстояние h есть длина высоты этого тетраэдра, опущенной из точки O_1 на плоскость грани BDC_1. Для её нахождения достаточно знать объём V тетраэдра O_1DBC_1 и площадь треугольника DBC_1. Вычислим их. Заметим, что прямая O_1C_1 перпендикулярна плоскости O_1DB, т. к. она перпендикулярна BD и BB_1. Значит, объём тетраэдра O_1DBC_1 равен

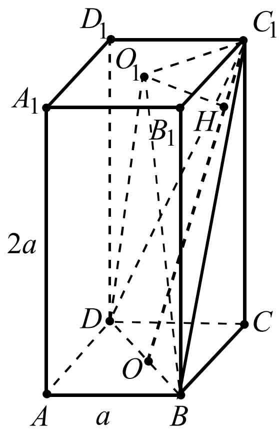


Рис. 8

$$V=\frac{1}{3}\cdot O_1C_1\cdot S_{DBO_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\sqrt{2}=\frac{a^3}{3}.$$

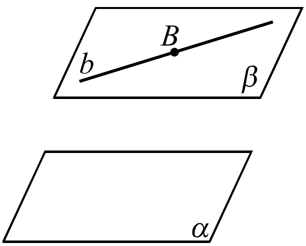
Площадь треугольника DBC_1 равна

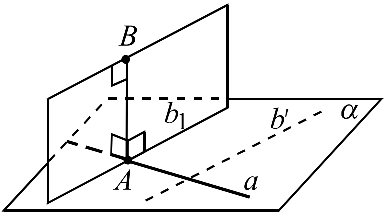
$$S=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot C_1O=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sqrt{4a^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{3a^2}{2}.\ \text{Отсюда}\ h=\frac{3\cdot\frac{a^3}{3}}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{2a}{3}.\ ▲$$

§5. Расстояние между скрещивающимися прямыми

●Пусть плоскость α параллельна плоскости β, прямая b лежит в плоскости β, точка B лежит на прямой b. Очевидно, что расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию от прямой b до плоскости α и равно расстоянию между плоскостями α и β.

●Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b. Проведём через прямую a плоскость, параллельную прямой b. Через прямую b проведём плоскость, перпендикулярную плоскости α, пусть линия пересечения этих плоскостей b_1 (эта прямая есть проекция прямой b на плоскость α). Точку пересечения прямых a и b_1 обозначим A. Точка A является проекцией некоторой точки B прямой b. Из того, что $AB\perp \alpha$, следует, что $AB\perp a$ и $AB\perp b_1$; кроме того $b \parallel b_1$, значит $AB\perp b$. Прямая AB пересекает скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярна и той, и другой. Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых.





●*Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию от любой точки прямой b до плоскости α.*

* *Расстояние между скрещивающимися прямыми* равно длине их общего перпендикуляра. Пусть в пространстве задана прямая l_1 с известным направляющим вектором $\vec{a}_1$ (*направляющим вектором* прямой называется ненулевой вектор, параллельный этой прямой), прямая l_2 с известным направляющим вектором $\vec{a}_2$, точки A_1 и A_2, лежащие соответственно на l_1 и l_2, кроме того, известен вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}$. Пусть отрезок P_1P_2 – общий перпендикуляр к l_1 и l_2 (см. рис. 9). Зада-

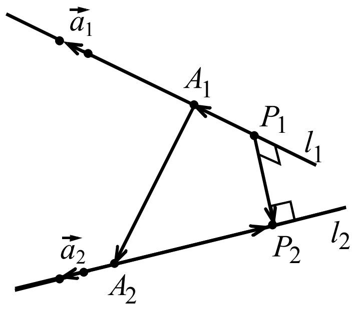


Рис. 9

ча заключается в нахождении длины этого отрезка. Представим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в виде суммы $\overrightarrow{P_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2P_2}$. Затем, пользуясь коллинеарностью векторов $\overrightarrow{P_1A_1}$ и $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_2P_2}$ и $\vec{a}_2$, получим для вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ представление $\overrightarrow{P_1P_2}=x\overrightarrow{a_1}+y\overrightarrow{a_2}+\vec{r}$, где x и y – неизвестные пока числа. Эти числа можно найти из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, т. е. из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}\left(x\overrightarrow{a_1}+y\overrightarrow{a_2}+\vec{r}\right)\cdot\overrightarrow{a_1}=0,\\ \left(x\overrightarrow{a_1}+y\overrightarrow{a_2}+\vec{r}\right)\cdot\overrightarrow{a_2}=0.\end{cases}$$

После этого находим длину вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$: $P_1P_2=\sqrt{\left(x\overrightarrow{a_1}+y\overrightarrow{a_2}+\vec{r}\right)^2}$.

Задача 8. Вычислить расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром a.

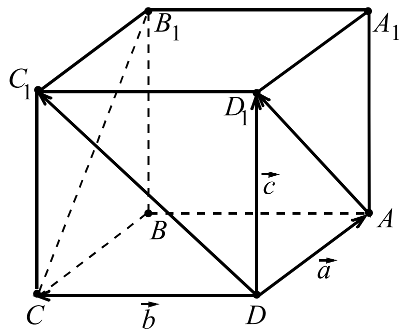


Рис. 10

$\triangle$ Пусть дан куб $A..D_1$ с ребром a. Найдём расстояние между прямыми AD_1 и DC_1 (рис. 10). Введём базис $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DD_1}$. За направляющие векторы прямых AD_1 и DC_1 можно взять $\overrightarrow{AD_1}=\vec{c}-\vec{a}$ и $\overrightarrow{DC_1}=\vec{b}+\vec{c}$. Если P_1P_2 – общий перпендикуляр к рассматриваемым прямым, то

$$\overrightarrow{P_1P_2}=x\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+y\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}.$$

Составим систему уравнений для нахождения неизвестных чисел x и y:

$$\begin{cases}\left(x\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+y\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0,\\ \left(x\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+y\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=0.\end{cases}$$

Приведём эту систему к равносильной:

$$\begin{cases}2x+y-1=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$$

Отсюда находим $x=\dfrac{2}{3}$, $y=-\dfrac{1}{3}$. Тогда

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a}) - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c},$$

$$P_1P_2 = \sqrt{\frac{1}{9}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \ \blacktriangle$$

● Две скрещивающиеся прямые всегда лежат соответственно в параллельных плоскостях, и *расстояние между прямыми равно расстоянию между этими плоскостями*.

Задача 9. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все рёбра которой равны 1, найти расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

$\triangle$Пусть O и O_1 – центры оснований призмы (рис.11). Плоскость AOO_1, в которой лежит прямая AA_1, параллельна плоскости BCC_1, в которой лежит прямая BC_1. Из точки O опустим перпендикуляр OH на плоскость BCC_1. Его длина равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно, искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.$\blacktriangle$

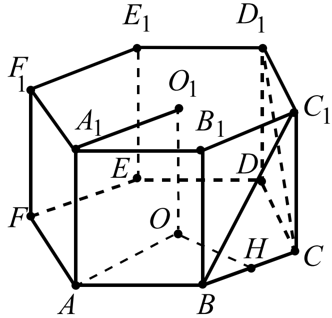


Рис. 11

§6. Угол между прямой и плоскостью в пространстве

● *Углом между наклонной и плоскостью* называется угол между наклонной и её проекцией на эту плоскость. Если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол между прямой и плоскостью считается нулевым. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними по определению считается равным 90°. Если вектор $\vec{n}\,(a;b;c)$ перпендикулярен плоскости α, то угол φ между этой плоскостью и прямой a, проходящей через точки A и B, определяется из равенства

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|.$$

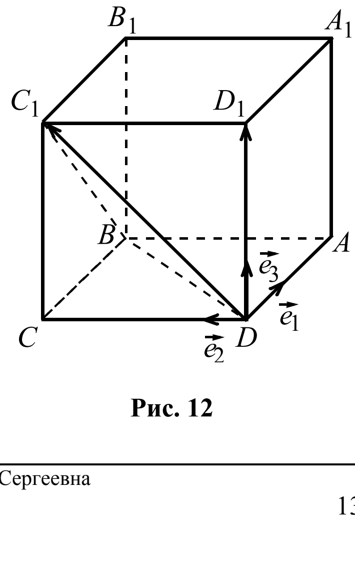


Рис. 12

Задача 10. В кубе $A..D_1$ найти угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D.

△ Пусть ребро куба имеет длину a. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке D и базисом $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, где векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ имеют единичные длины и сонаправлены с векторами $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ (см. рис.12). В этой системе координат вершины куба имеют координаты: $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$, $C(0, a, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $A_1(a, 0, a)$, $B_1(a, a, a)$, $C_1(0, a, a)$, $D_1(0, 0, a)$.

Направляющий вектор прямой BD_1 – вектор $\overrightarrow{BD_1} = (-a, -a, a)$.

Составим уравнение плоскости BC_1D. Пусть оно имеет вид $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$. Эта плоскость проходит через три точки: (0, 0, 0), (a, a, 0) и (0, a, a), подставляем координаты этих точек в уравнение плоскости и получаем систему уравнений: $\begin{cases} d_1 = 0, \\ a \cdot a_1 + a \cdot b_1 + d_1 = 0, \\ a \cdot b_1 + a \cdot c_1 + d_1 = 0. \end{cases}$

Находим $a_1 = -b_1 = c_1$, $d_1 = 0$. Тогда уравнение этой плоскости будет x-y+z=0, $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Искомый угол равен $\sin\varphi = \dfrac{\left(1\cdot(-a) + (-1)\cdot(-a) + 1\cdot a\right)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{a}{3a} = \dfrac{1}{3}$, т. е.

$\varphi = \arcsin\dfrac{1}{3}$. ▲

● При геометрическом способе нахождения угла между наклонной a и плоскостью α, пересекающей эту наклонную в некоторой точке O, выбирают какую-нибудь точку A прямой a и опускают из неё перпендикуляр AA' на плоскость α. Угол AOA' будет искомым углом между прямой a и плоскостью α. Для его нахождения можно использовать значения тригонометрических функций острых углов прямоугольного треугольника AOA' или теорему косинусов.

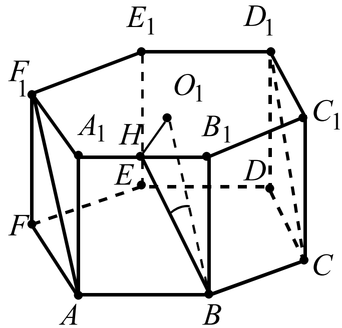


Рис. 13

Задача 11. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямой CD_1 и плоскостью ABB_1.

∆ Пусть O_1 – центр верхнего основания (рис.13), прямая O_1H перпендикулярна A_1B_1.
Прямая BO_1 параллельна CD_1. Искомый угол φ равен углу HBO_1. В прямоугольном треугольнике HBO_1 имеем $BO_1 = \sqrt{2}$, $O_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. ▲

* С помощью векторов угол находится так. Пусть в пространстве заданы плоскость α с известным базисом $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, точка A, лежащая в этой плоскости, и точка M вне её, причём вектор $\overrightarrow{AM} = \vec{r}$ предполагается известным (в том же базисе). Пусть N – ортогональная проекция точки M на плоскость α (рис. 14). Задача заключается в нахождении угла MAN. Представим вектор $\overrightarrow{MN}$ в виде разности векторов $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AM}$, а затем, пользуясь компланарностью векторов $\overrightarrow{AN}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, запишем его в виде $\overrightarrow{MN} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{r}$, где x и y – неизвестные пока числа. Эти числа можно найти из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MN}$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. из следующей системы уравнений:

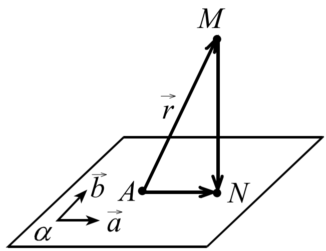


Рис. 14

$$\begin{cases}\left(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{r}\right)\cdot\vec{a} = 0,\\ \left(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{r}\right)\cdot\vec{b} = 0.\end{cases}$$

Если $\overrightarrow{AN} = \vec{0}$, то, очевидно, прямая AM перпендикулярна плоскости α, иначе

$$\cos\angle(AM, \alpha) = \cos\angle(AM, AN) = \frac{\left|\left(x\vec{a} + y\vec{b}\right)\cdot\vec{r}\right|}{\left|x\vec{a} + y\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{r}\right|}.$$

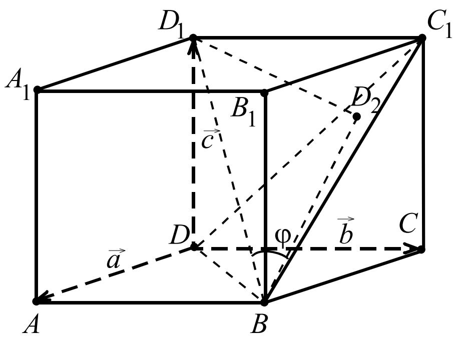


Рис. 15

Задача 12. В кубе $A..D_1$ найти угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D.
∆ Пусть длина ребра куба равна a.

Введём базис $\vec{a}=\overrightarrow{DA},\ \vec{b}=\overrightarrow{DC},\ \vec{c}=\overrightarrow{DD_1}$ (рис. 15). Обозначим через D_2 – ортогональную проекцию точки D_1 на плоскость BC_1D. Тогда $\overrightarrow{D_1D_2}=x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. Составим систему уравнений для нахождения неизвестных чисел x и y:

$$\begin{cases}\left(x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0,\\ \left(x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=0.\end{cases}$$

Приведём эту систему к равносильной:

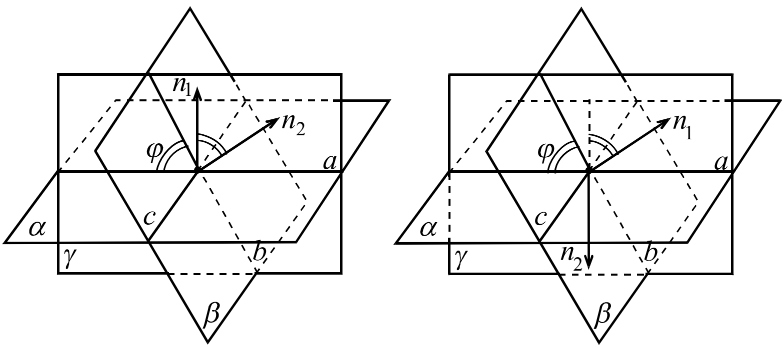
$$\begin{cases}2x+y+2=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$$

Отсюда находим $x=-\dfrac{4}{3},\ \ y=\dfrac{2}{3}.$ Теперь найдём косинус искомого угла

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{BD_2}\right|}{\left|\overrightarrow{D_1B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD_2}\right|}=\frac{\left|\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(-\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)\right|}{\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{8}{3}a^2}{a\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ Следовательно, $\angle\left(BD_1,BC_1D\right)=\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

§7. Угол между плоскостями



а) **Рис. 16** **б)**

● Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Плоскость γ перпендикулярна прямой c и пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Угол между прямыми a и b называется *углом между плоскостями* α и β. Он изменяется от 0° до 90°. Угол между плоскостями равен либо углу между векторами, перпендикулярными плоскостям (рис. 16а), либо дополняет его до 180°. В обоих случаях $\cos\varphi = \left|\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right|$. Итак, векторы $\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ соответственно перпендикулярны плоскостям $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, угол между этими плоскостями определяется из равенства

$$\cos\varphi = \left|\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right| = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|.$$

Задача 13. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* отношение длины высоты к длине стороны основания равно $\sqrt{6}:4$. Найти угол между плоскостями *SBC* и *SDE*.

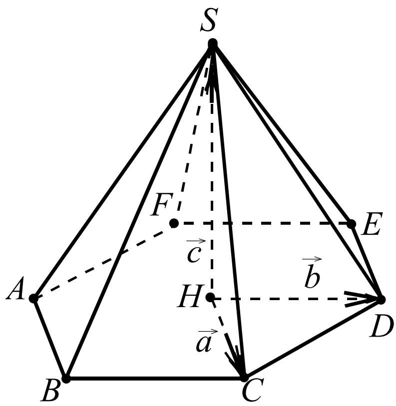


Рис. 17

$\triangle$ Пусть $SH = \sqrt{6}a$, тогда $AB=4a$. Введём базис $\vec{a} = \overrightarrow{HC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{HD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{HS}$, (см. рис. 17) вычислим $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 16a^2$, $\vec{c}^2 = 6a^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 8a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$. Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – ненулевые векторы, перпендикулярные *SBC* и *SDE* соответственно, а φ – угол между этими плоскостями, то $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$.

Пусть $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Тогда $\begin{cases} \left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right)\cdot\vec{b} = 0, \\ \left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 0. \end{cases}$

Система приводится к равносильной

$$\begin{cases} 8x + 16y = 0, \\ 6z - 16x - 8y = 0. \end{cases}$$

Положив, например, $y = -1$, получим $x = 2$, $z = 4$. Итак, $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$.

Чтобы получить вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости SDE, достаточно в выражении для $\vec{m}$ поменять местами векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и $\vec{n}=2\vec{b}-\vec{a}+4\vec{c}$. Находим $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{72}{12\cdot 12}=\dfrac{1}{2}$, т. е. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. ▲

● **Задача 14.** В условиях задачи 13 найти угол между плоскостями AA_1D и BC_1D.

△ Уравнение плоскости AA_1D: $y=0$, вектор $\vec{n}_1=(0,1,0)$ перпендикулярен AA_1D, уравнение плоскости BC_1D: $x-y+z=0$, $\vec{n}_2=(1,-1,1)$ перпендикулярен BC_1D. Тогда искомый угол φ:

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 1+1\cdot 0|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{т. е. } \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ▲

● При геометрическом способе нахождения угла между плоскостями α и β выбирают какую-нибудь точку C, принадлежащую их линии пересечения l, и восставляют перпендикуляры a и b к линии l, лежащие в плоскостях α и β соответственно. Если линия пересечения плоскостей α и β не дана или находится вне данного рисунка, то для нахождения угла между плоскостями α и β, выбирают какие-нибудь плоскости α' и β', соответственно параллельные α и β, линия пересечения которых расположена на рисунке. После этого находят угол между плоскостями α' и β'.

Задача 15. В правильной шестиугольной призме $A..F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1.

△ Плоскость CDD_1 параллельна плоскости BEE_1, следовательно, угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1 равен углу между плоскостями ABB_1 и BEE_1 (рис. 18). Прямая BB_1 является линией пересечения этих плоскостей, AB и BE перпендикулярны BB_1. Таким образом, искомый угол равен углу ABE и равен 60°. ▲

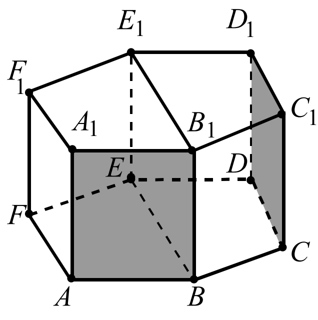


Рис. 18

§8. Сфера, описанная около многогранника

Сфера описана около многогранника, если она проходит через кадую его вершину (многогранник вписан в сферу). Центр такой сферы равноудалён от вершин.

Каждое ребро многогранника – хорда описанной сферы, поэтому *центр описанной сферы – точка пересечения плоскостей, проходящих перпендикулярно рёбрам через их середины.*

Каждая грань вписанного многогранника вписана в окружность – сечение сферы плоскостью этой грани. Перпендикуляр из центра сферы на плоскость её сечения проходит через центр окружности этого сечения.

Значит, *центр описанной сферы принадлежит всем перпендикулярам к граням, проведённым через центры описанных вокруг них окружностей.*

Если окружность лежит в плоскости α, а точка M не принадлежит этой плоскости, то через эту окружность и точку M можно провести сферу.

□ Геометрическое место точек, равноудалённых от всех точек окружности, есть прямая a, проходящая через центр окружности (рис. 19).

Геометрическое место точек, равноудалённых от точки M и некоторой точки A окружности, есть плоскость β, перпендикулярная отрезку MA и проходящая через его середину.

Прямая a и плоскость β не параллельны иначе точка M лежала бы в (плоскости α), они пересекаются. Их точка пересечения – точка O – равноудалена и от точки M, и от всех точек окружности. ■

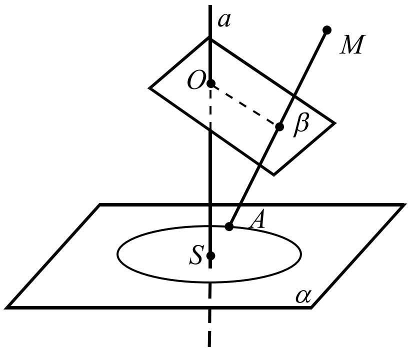


Рис. 19

Отсюда следует, что *около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность,* в частности

а) *около любой треугольной пирамиды можно описать сферу,*

б) *около правильной пирамиды можно описать сферу.*

Задача 16. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC равно 6, ребро BD равно 8, все остальные рёбра равны $\sqrt{74}$ (рис. 20). Найти радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

△ Пусть M и N – середины рёбер BD и AC; треугольники ABC и ADC – равные равнобедренные с основанием AC, поэтому $AC \perp BN$, $AC \perp DN$. Отсюда следует, что плоскость BND перпендикулярна ребру AC и проходит через его середину, центр описанной сферы лежит в плоскости BND.

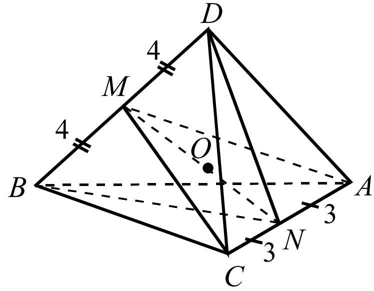


Рис. 20

Треугольники BCD и BAD также равные равнобедренные с общим основанием BD, поэтому $CM \perp BD$, $AM \perp BD$, и плоскость CMA перпендикулярна ребру BD и проходит через его середину. Центр описанной сферы лежит в этой плоскости.

Плоскости BND и CMA пересекаются по прямой MN, центр O сферы лежит на этой прямой. Находим: $BN = ND = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{65}$,

$$MN = \sqrt{BN^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 7.$$

Из прямоугольного треугольника MOD имеем: $MO = \sqrt{R^2 - MD^2} = \sqrt{R^2 - 16}$, а из прямоугольного треугольника NOC выражаем:

$$ON = \sqrt{R^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - 9},$$

тогда из $MN = MO + ON$ следует $\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7$.

Решая уравнение, находим $R = 5$.

Предположение о том, что точка O лежит не на отрезке MN, а на прямой MN вне его, приводит к одному из уравнений:

$$\sqrt{R^2 - 16} - \sqrt{R^2 - 9} = 7, \text{ либо } \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = 7.$$

Первое из них не имеет смысла $\left(\sqrt{R^2 - 16} < \sqrt{R^2 - 9}\right)$, а второе не имеет решений. ▲

● На примере следующей задачи продемонстрируем векторный метод нахождения радиуса сферы, описанной около многогранника.

Задача 17. Ребро куба $A..D_1$ равно 1. Через вершину A куба и середины рёбер BC, DD_1, A_1B_1 проведена сфера. Найдите радиус этой сферы.

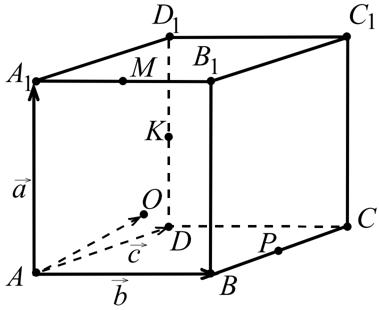


Рис. 21

△ Введём базис $\vec{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$, (рис. 21). Пусть точки P, K, M – середины рёбер BC, DD_1, A_1B_1 соответственно, точка O – центр сферы, и пусть $\overrightarrow{AO}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{n}$. Поскольку $\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{OK}^2=\overrightarrow{OP}^2=\overrightarrow{OM}^2=R^2$, где R– радиус сферы, из этих равенств следует, что

$$\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OK}\right)\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OK}\right)=0,$$

$\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OP}\right)\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)=0,\quad \left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)=0,$ следовательно, $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OK}\right)\overrightarrow{AK}=0,\quad \left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OP}\right)\overrightarrow{AP}=0, \left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OM}\right)\overrightarrow{AM}=0,$ но $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AO}-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}\right)=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AK}.$ Аналогично, $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AP},\quad \overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}.$ Таким образом, получаем, что $\left(2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AK}\right)\overrightarrow{AK}=\left(2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AP}\right)\overrightarrow{AP}=\left(2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{AI}=0,$ откуда

$$\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AK}^2,\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}^2,\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}^2.\end{cases}$$

Получаем равносильную систему: $\begin{cases}x+2z=\dfrac{5}{4}\\ 2y+z=\dfrac{5}{4},\\ 2x+y=\dfrac{5}{4}\end{cases}$

отсюда $x=y=z=\dfrac{5}{12}$ и $R=\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}.$ ▲

● Приведём геометрическое решение этой же задачи.

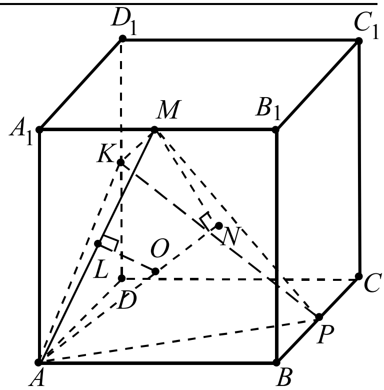


Рис. 22

△ Найдём $AP = AM = AK = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $MK = KP = MP = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, следовательно, пирамида $AKMP$ с вершиной A – правильная. Пусть N – основание высоты из точки A на плоскость KMP, а L – середина AM. Из подобия треугольников AMN и ALO (рис. 22) находим

$$\frac{R}{AM} = \frac{\frac{1}{2}AM}{AN},\ MN = \frac{2}{3}\cdot KM\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$AN^2 = AM^2 - MN^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4},\ \ AN = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{Итак, } R = \frac{1}{2}\cdot\frac{AM^2}{AN} = \frac{5\sqrt{3}}{12}.\ \blacktriangle$$

§9. Биссектор

Биссектором двугранного угла называется полуплоскость, которая принадлежит этому углу, имеет границей его ребро и разделяет угол на два двугранных угла равной величины.

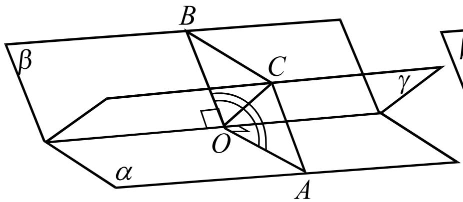


Рис. 23

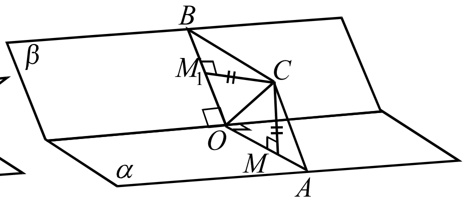


Рис. 24

Будем рассматривать углы меньше развёрнутого.

Биссектриса каждого линейного угла данного двугранного угла принадлежит его биссектору (на рис. 23 биссектор γ содержит биссектрису OC линейного угла AOB). Правило построения биссектора: через ребро угла и биссектрису его линейного угла.

Как и у биссектрисы плоского угла, точки биссектора обладают свойством равноудалённости от граней двугранного угла.

Биссектор двугранного угла есть геометрическое место точек внутри этого угла, равноудалённых от плоскостей его граней (рис. 24).

§10. Сфера, вписанная в многогранник

Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней.

Центр вписанной сферы равноудалён от всех плоскостей граней на расстояние, равное радиусу.

Следовательно, *центр вписанной сферы принадлежит биссекторам всех двугранных углов многогранника.* Обратно, если существует точка O, общая всем биссекторам, лежащая внутри многогранника, и она удалена от граней на расстояние r, то сфера с центром в точке O и радиуса r касается всех граней многогранника.

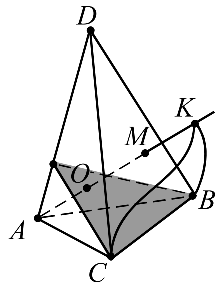


Рис. 25

Теорема. *В любой тетраэдр можно вписать сферу и только одну.*

□ Пусть β_1 – биссектор двугранного угла с ребром AC, а β_2 – биссектор двугранного угла с ребром AB (рис. 25). Эти биссекторы имеют общую точку A, следовательно, пересекутся по некоторому лучу AK. Каждая точка этого луча лежит на β_1 и поэтому равноудалена от плоскостей ACB и ACD, лежит на β_2, равноудалена от плоскостей ABC и ABD. Значит каждая точка луча AK равноудалена от трёх граней: ABC, ACD и ABD, и луч AK принадлежит биссектору двугранного угла при ребре AD.

Пусть луч AK пересекает грань BCD в точке M. Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссектор этого угла пересекает отрезок AM. Точка пересечения O лежит на луче AK и равноудалена от граней ABC, ACD, ABD. В то же время расстояния от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, так как точка O принадлежит биссектору двугранного угла, образованного этими плоскостями. Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, а сфера с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию от точки O до грани тетраэдра, вписана в тетраэдр. Точка O определяется единственным образом. ■

Задача 18. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C прямой; ребро AD перпендикулярно плоскости ABC (рис. 26). Найти радиус вписанной сферы, если

$$AD = BC = 3, \ AC = 4.$$

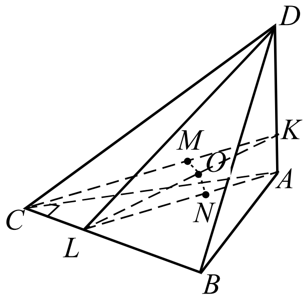


Рис. 26

$\triangle$ По теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна плоскости ACD) (т. к. DA – перпендикуляр к плоскости ABC, прямая BC перпендикулярна проекции AC, следовательно, она перпендикулярна наклонной DC; итак, $\angle BCD = 90°$, $\angle BCA = 90°$, следовательно прямая BC перпендикулярна плоскости ACD). Значит угол DCA – линейный угол двугранного угла при ребре BC и биссектор BCK проходит через биссектрису CK этого линейного угла. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе.

Далее угол BAC – линейный угол двугранного угла при ребре AD, проводим его биссектрису AL, а затем биссектор ADL. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе, следовательно, центр сферы лежит на прямой LK пересечения биссекторов BCK и ADL внутри тетраэдра.

Пусть O – центр сферы, точка O лежит на LK, расстояния от точки O до основания ABC и до грани ACD равны (тогда расстояния от точки O до всех граней будут равны).

Если $ON \perp ABC$, то $ON \parallel DA$, следовательно, точка N лежит на AL. Если $OM \perp ACD$, то $OM \parallel BC$, значит точка M лежит на CK. Итак, $ON = OM$.

Из условия следует, что $\triangle CAD = \triangle ACB$, поэтому равны их биссектрисы соответственных углов ACD и CAB и они отсекают на равных сторонах AD и BC равные отрезки $AK = CL$. Отсюда следует, что $\triangle KCL = \triangle LAK$. Значит, $\angle CKL = \angle KLA$. Из этого равенства и из равенства $OM = ON$ следует, что $\triangle MOK = \triangle NOL$. Поэтому и $OK = OL$, т. е. $MO = \dfrac{1}{2} CL$. Это и есть искомый радиус.

По свойству биссектрисы в треугольнике ABC биссектриса AL делит сторону BC в отношении $CL : BL = CA : BA = 4:5$. Отсюда

$$\tilde{N}L = \frac{4}{9} BC = \frac{4}{3} \text{ и } MO = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Пусть O – центр сферы. Рассмотрим четыре пирамиды с общей вершиной O и основаниями – гранями тетраэдра: ABC, ABD, ACD, BCD. Центр O одинаково удалён от всех граней пирамиды на расстояние r, равное радиусу вписанной сферы, т. е. у всех этих пирамид одинаковая высота, равная r. Сумма объёмов всех четырёх пирамид составляет

$$\frac{1}{3}r\left(S_{ABC}+S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}\right)=\frac{1}{3}rS_n,$$

(S_n – площадь полной поверхности пирамиды $ABCD$) и равна объёму V самой пирамиды $ABCD$, т. е. $V=\frac{1}{3}rS_n$, откуда $r=\frac{3V}{S_n}$. Объём пирамиды может быть найден по формуле $V=\frac{1}{3}AD\cdot S_{ABC}$.

Имеем $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=6,\ \ S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot AB=\frac{15}{2}$,

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD=6,\ S_{BCD}=\frac{1}{2}DC\cdot AB=\frac{15}{2}.$$

Замечание. Формула $r=\frac{3V}{S_n}$ верна для любого описанного вокруг сферы радиуса r многогранника и пригодна для определения радиуса этой сферы. Итак, $S_n=27,\ V=\frac{1}{3}AD\cdot S_{ABC}=6,\ r=\frac{3V}{S_n}=\frac{2}{3}.$ ▲

Прямая и сфера могут располагаться тремя способами.

Пусть R – радиус сферы, OK – перпендикуляр из центра сферы на прямую a.

1) Прямая a не пересекает сферу, если $OK > R$.

2) Прямая a касается сферы, если $OK = R$ (прямая проходит через конец радиуса на сфере и перпендикулярна этому радиусу).

3) Прямая пересекает сферу в двух точках, если $OK < R$.

Секущие и касательные к сфере обладают такими же свойствами, как и к окружности, в частности:

а) *если две прямые пересекаются в точке S, и касаются сферы в точках K и L, то $SK = SL$* (***свойство касательных***);

б) *если две прямые пересекаются в точке S, одна касается сферы в точке K, другая пересекает сферу в точках M* и *N, то* $SK^2 = SM \cdot SN$ (***теорема о касательной и секущей***);

в) *если две прямые пересекаются в точке S, одна из них пересекает сферу в точках M и N, другая – в точках P и Q, то* $SM \cdot SN = SP \cdot SQ$ (точка *S* может располагаться снаружи **(*теорема о секущих*)** или внутри сферы **(*теорема о пересекающихся хордах*))**.

Задача 19. В тетраэдре *ABCD* *AB* = 2, *CD* = 4, а остальные рёбра равны 6. На отрезке *MN*, соединяющем середины рёбер *AB* и *CD*, как на диаметре построена сфера, которая пересекает ребро *BC* в точках *P* и *Q*. Найдите длину отрезка *PQ*.

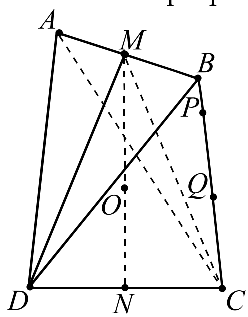


Рис. 27

△ Заметим, что отрезок *MN* перпендикулярен рёбрам *AB* и *CD* (рис. 27). Действительно, *DM* = *MC* как медианы в равных по трём сторонам треугольниках *ABC* и *ABD*. Так как *MN* – диаметр сферы, то прямые *AB* и *CD* – касательные к сфере.

Пусть *BP* = *x*, *CQ* = *y*. По теореме о касательной и секущей $BM^2 = BP \cdot BQ$ и $NC^2 = QC \cdot PC$, откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x(6-y)=1, \\ y(6-x)=4. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$x_1 = \frac{11-\sqrt{105}}{4},\ y_1 = \frac{13-\sqrt{105}}{4};\quad x_2 = \frac{11+\sqrt{105}}{4},\ y_2 = \frac{13+\sqrt{105}}{4}.$$

Первое решение даёт $PQ = 6 - x_1 - y_1 = \frac{\sqrt{105}}{2}$, второе решение отбрасываем, так как $6 - x_2 - y_2 < 0$. ▲

§11. Объём тетраэдра

В задачах 8 и 20 уже обсуждались две формулы объёма тетраэдра.

1. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где H – высота к основанию, и

2. $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$, где r – радиус вписанной сферы, а S_n – площадь полной поверхности тетраэдра.

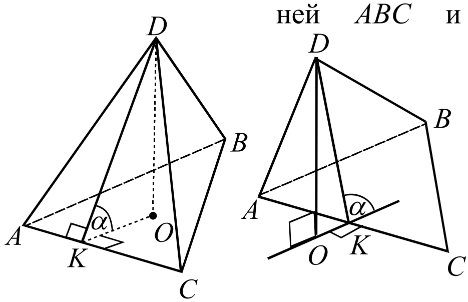
Первая из них, основная формула объёма, часто используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми, расстояния от точки до плоскости (как в задаче 7), расстояния между плоскостью и параллельной ей прямой или расстояния между двумя плоскостями.

Дадим краткий вывод ещё двух формул объёма тетраэдра:

3. $V=\frac{2}{3}S_1\cdot S_2\cdot\frac{\sin\alpha}{a}$, где S_1 и S_2 площади двух граней, $a-$ длина их общего ребра, $\alpha-$ величина двугранного угла между этими гранями.

4. $V=\frac{1}{6}a\cdot b\cdot d\cdot\sin\varphi$, где a и b – длины противоположных рёбер тетраэдра, φ – угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти рёбра, d – расстояние между этими прямыми.

□ Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором $AC = a$, площади граней ABC и ADC равны S_1, и S_2 соответственно. Пусть вершина D проектируется в точку O плоскости основания ABC и $DK\perp AC$ (рис. 28). По теореме о трёх перпендикулярах $OK\perp AC$.



а) Рис. 28 б)

Угол DKO либо равен величине α двугранного угла между гранями ADC и ABC (рис. 28а), либо $\angle DKO=180°-\alpha$ (рис. 28б). Если же точка O лежит на прямой AC, то плоскости ADC и ABC перпендикулярны друг другу, $\alpha=90°$. Во всех случаях $DO = DK\cdot\sin\alpha$.

Так как $S_2=\frac{1}{2}AC\cdot DK$, то

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DO=\frac{1}{3}S_1\cdot DK\cdot\sin\alpha=\frac{1}{3}S_1\frac{\frac{1}{2}AC\cdot DK}{\frac{1}{2}AC}\sin\alpha,$$

откуда $V=\frac{2}{3}S_1\cdot S_2\cdot\frac{\sin\alpha}{a}$. ■

Для доказательства формулы 4 достроим тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое его ребро плоскость, параллельную противолежащему ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед, в котором рёбра исходного тетраэдра являются диагоналями граней (рис. 29).

□ За основание параллелепипеда примем грань с диагональю CD, её площадь обозначим S, тогда объём параллелепипеда $v = S \cdot d$, где d – расстояние между плоскостью основания и плоскостью параллельной ей грани.

Объём параллелепипеда равен сумме объёма тетраэдра V и объёма четырёх пирамид, в каждой из которых основание составляет половину площади S параллелограмма $KCFD$ и высота совпадает с высотой параллелепипеда.

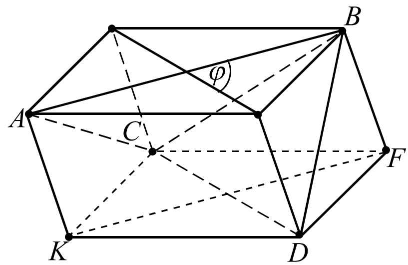


Рис. 29

Итак,

$$v = V + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S \cdot d \right) = V + \frac{2}{3} v,$$

откуда $V = \frac{1}{3} v.$ Так как $v = S \cdot d = \left(\frac{1}{2} AB \cdot CD \sin \varphi \right) d,$ то

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi = \frac{1}{6} abd \sin \varphi, \text{ где } AB = a,\ CD = b. \ \blacksquare$$

Формула 4 особенно удобна в случае, когда противоположные рёбра тетраэдра (например, AB и CD) перпендикулярны друг другу.

Задача 20. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро AB и центр вписанного в тетраэдр шара.

△ Пусть $a = AB$, x – площадь искомого сечения. Воспользовавшись формулой 3 для объема тетраэдра $ABCD$ и его частей, получим

$$\frac{2}{3} \frac{px \sin \frac{\alpha}{2}}{a} + \frac{2}{3} \frac{qx \sin \frac{\alpha}{2}}{a} = \frac{2}{3} \frac{pq \sin \alpha}{a}.$$

Следовательно, $x = \dfrac{2pq\cos\dfrac{\alpha}{2}}{p+q}$. ▲

Задача 21. В каком отношении делит объём тетраэдра плоскость, параллельная двум его скрещивающимся рёбрам и делящая одно из других рёбер в отношении 2 : 1?

△ Сечение тетраэдра данной плоскостью является параллелограммом. Каждую из двух полученных частей тетраэдра можно разрезать на пирамиду, основанием которой служит этот параллелограмм, и тетраэдр (рис. 30).

Объёмы этих пирамид равны

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot d\cdot S_{\text{ï àð}} = \frac{4}{81}abd\sin\varphi$$

и $$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\text{ï àð}} = \frac{2}{81}abd\sin\varphi.$$

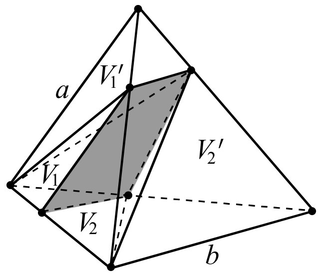


Рис. 30

А объёмы тетраэдров можно выразить по формуле 4:

$$V_1' = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot d\cdot\frac{2}{3}a\cdot b\cdot\sin\varphi = \frac{2}{27}abd\sin\varphi$$ и

$$V_2' = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}d\cdot a\cdot\frac{1}{3}b\cdot\sin\varphi = \frac{1}{54}abd\sin\varphi.$$

Тем самым, отношение объёмов полученных частей равно

$$\frac{V_1+V_1'}{V_2+V_2'} = \frac{\frac{10}{81}abd\sin\varphi}{\frac{7}{162}abd\sin\varphi} = \frac{20}{7}.$$ ▲

Контрольные вопросы

Вопросы 1-6 представляют собой задания из ЕГЭ (С2)

В вопросах 1-6 рассматривается правильная четырехугольная пирамида *SABCD*, все рёбра которой равны 1, найти. Решите двумя способами (геометрическим и координатным):

1(2). Угол между прямыми AF и BE, где точки E и F – середины рёбер SC и SD.

2(2). Расстояние от точки B до прямой SD.

3(2). Расстояние между прямыми SB и DC.

4(2). Угол между прямой AC и плоскостью SBC.

5(2). Угол между плоскостями SAB и SCD.

6(2). Расстояние от точки B до SDC.

7(6). Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a (напомним, что *правильный тетраэдр* – это треугольная пирамида, у которой все рёбра равны).

а) Доказать, что противоположные рёбра AB и CD правильного тетраэдра лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми 90°.

б) Доказать, что отрезок MN, соединяющий середины отрезков AB и CD есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CD.

в) Доказать, что $MN = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

г) Найти величину двугранного угла при ребре AB.

8(2). В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC$ и $AD = DC$. Доказать, что рёбра AC и BD перпендикулярны.

Задачи

(Задачи 1-4 из вариантов ЕГЭ (С2), остальные – из вариантов вступительных экзаменов разных лет в МФТИ)

1(4). Основание $ABCD$ наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат, а все боковые грани призмы – равные ромбы. Углы BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найти расстояние от точки A_1 до плоскости BDD_1, если сторона квадрата $ABCD$ равна 10.

2(4). Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера, центр которой лежит на боковом ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что AB =12, $A_1M : MC_1$= 3 : 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3(4). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых рёбрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 8 : 11$, $B_1P : PB = 2 : 1$. Во сколько раз объём данного параллелепипеда больше объёма пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?

4(4). Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12, а высота равна $\dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. На ребрах AC, A_1C_1 и AB расположены соответственно точки P, F и E так, что $AP = 2$, $A_1F = 6$ и $AE = 6$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и E, найти угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения.

5(6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковая грань образует с основанием угол, равный arctg 2. Точки E, F и K выбраны на рёбрах AB, AD, SC так, что $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{CK}{KS} = 2.$

Найти:

1) расстояние от точки D до плоскости EFK,

2) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

6(6). Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно 20, $\angle DAB = \arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{5}$. Точки A_1, B_1 C_1 – середины рёбер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3)* радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

7(8). Расстояние от центра O шара радиуса 12, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$. Найти:

1) высоту пирамиды;

2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;

3)* радиус вписанного в пирамиду шара.

8(8). В тетраэдре *KLMN* ребро $NK = 1$, а точка *O* лежит на ребре *LM* и делит его в отношении $LO : OM = 1 : 5$. Сечение *NOK* имеет площадь 5 и образует с каждой из граней *KLM* и *KMN* угол 45°. Найти объём тетраэдра *KLMN*.

9(4). В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение длин бокового ребра и стороны основания равно 2. Найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D.

10(6). В треугольной пирамиде *DABC* рёбра *DA*, *DB*, *DC*, *BC* равны между собой и равны 2, $\grave{A}\tilde{N} = \sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около пирамиды *DABC* сферы.

11(2). Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна *a*, а высота призмы равна *h*. Найти расстояние от стороны основания до не пересекающей её диагонали призмы.

12(4). Рёбра *AB*, *AC*, *AD* тетраэдра *ABCD* попарно перпендикулярны, а их длины равны *a*, *b*, *c* соответственно. Найти радиус шара, описанного около этого тетраэдра.