Управление образования администрации г. Владимира

**Муниципальное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
(повышения квалификации) специалистов –
городской информационно-методический центр**

Задания

для подготовки к

О Л И М П И А Д А М.

МАТЕМАТИКА

Владимир

2010

ББК 22.1

Научный рецензент

Рогачева Е.Ю., профессор кафедры педагогики ВГГУ, д.п.н., научный консультант Городского информационно-методического центра

Рецензент

Антонова Е.И., к.п.н., заведующая кабинетом естественно-математического и географического образования ВИПКРО

Всероссийская Олимпиада школьников по математике. Школьный и муниципальный этапы (2005-2009 г.г). / Составитель: А.И. Казнина. Рецензент: Е.И. Антонова. - Владимир: Городской информационно-методический центр, 2010. – С. .

На титул:

Данный сборник содержит Положение и методические рекомендации об организации проведения школьного и муниципального этапов Всероссийской Олимпиады школьников по математике. Сборник предназначен для учителей математики и учащихся 6-11 классов. В сборнике представлены задания муниципального этапа Всероссийской Олимпиады школьников по математике за 2005 – 2009 гг. Ко всем заданиям даны ответы, указания к решению и полностью решения к наиболее трудным.

Сборник заданий муниципального этапа Олимпиады по математике содержит Положение и методические рекомендации по организации проведения школьного и муниципального этапов Всероссийской Олимпиады школьников, тексты Олимпиадных заданий муниципального этапа за последние 5 лет, ответы и указания к решению.

Методические материалы содержат рекомендации по порядку проведения Олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию Олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников Олимпиад.

Методические рекомендации для школьного и муниципального этапов Всероссийской Олимпиады школьников по математике в 2009/2010 утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 09 июля 2009).

В брошюре содержатся задачи олимпиад по математики, проходивших в городе с 2005 по 2009 года. Задачи снабжены подробными решениями к наиболее трудным.

В книге приведены классические олимпиадные задачи, разбитые по основным темам олимпиадной математики. Предназначена для учителей математики, руководителей кружков, факультативов, школьников, рекомендуется для подготовки к олимпиадам начальных уровней.

Компоновка заданий, начинающихся с простых задач со школьной формулировкой и заканчивающихся 1-2 достаточно сложными задачами. Авторы сборника стремились к его максимальной доступности.

Пособие предназначено выпускникам и абитуриентам, поступающим в ВУЗы, где предъявляются достаточно высокие требования к математической подготовке; учащимся 7-11 классов, желающим участвовать и побеждать на олимпиадах различного уровня, а также преподавателям подготовительных отделений ВУЗов, учителям математики, студентам педвузов и репетиторам.

Решение задач требует сообразительности, хорошего владения некоторыми разделами элементарной математики, психологической подготовки и высокой логической культуры.

Математические олимпиады школьников: проблемы и перспективы развития

В нашей области ежегодно проводятся школьный, муниципальный и региональный этапы Всероссийской олимпиады школьников, что способствует выявлению одаренных учащихся, имеющих интерес и склонности к тем или иным предметным дисциплинам. Изначально проведение предметных олимпиад имело целью развить интерес учащихся к школьным дисциплинам. В настоящее время, роль предметных олимпиад возросла в связи с введением ЕГЭ и новыми правилами поступления в вузы. Успешно выступившие на олимпиадах школьники имеют преимущества при поступлении в престижные вузы страны и своего региона – а это в свою очередь повышает статус всего олимпиадного движения.

Олимпиадные испытания охватывают широкий круг учебных предметов, в том числе и предмет математику. За годы существования математические олимпиады стали самыми массовыми творческими соревнованиями школьников. Они проводятся практически во всех странах мира, а в Международной математической олимпиаде школьников, которая берет свое начало в середине прошлого столетия, ежегодно принимают участие более 90 стран, и эта цифра постоянно растет.

В математических олимпиадах основой успеха является не сумма конкретных знаний учащегося, а его способность логически мыслить, умение создать за короткий срок достаточно сложную и, главное, новую для него логическую конструкцию. Недаром только в математических олимпиадах задание может начинаться со слов: «Докажите, что…». Решая задачу выявления творческих способностей учащегося, т.е. умения «нестандартно мыслить», олимпиадная математика в значительной степени отошла от стандартной («школьной») математики. Хотя промежуточное звено между «школьной» и «олимпиадной» математикой – так называемые задачи повышенной трудности и занимательные задачи – всегда включались в школьные учебники по математике. Они помогают учителю в работе со способными учениками, в поддержке у них интереса к предмету.

Олимпиадная задача по математике – это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. Геометрические задачи вызывают наибольшие трудности у учеников. При этом можно утверждать, что как раз геометрия лучше всего развивает нестандартное мышление и помогает выделить математически одаренных школьников.

Однако, для успешного участия в олимпиадах необходимо выполнение следующих условий:

- систематическое проведение внеклассной работы по предмету;
- обеспечение регулярности проведения всех этапов олимпиад;
- серьезная, содержательная и интересная подготовительная работа перед проведением каждого этапа олимпиад;
- хорошая организация проведения олимпиад;
- интересное предметное содержание соревнований.

Проведение олимпиад и всей внеклассной работы по предмету является прекрасным средством повышения деловой квалификации учителей. Чтобы подготовить учащихся к участию в олимпиадах и проводить олимпиады, учителю необходимо вести кружки, факультативы; проводить большую подготовительную работу; подбирать и выполнять различные задачи и задания олимпиадного типа, детально знакомиться с различными вопросами математики, с новинками математической литературы. Подбор материала для кружковых занятий и для олимпиад, подготовка к проведению этих мероприятий являются одной из форм активной работы учителя по повышению своей научно-методической квалификации. Руководитель кружка тщательно продумывает методику работы над каждой задачей, предлагаемой им ученикам. На занятиях кружка приходится несколько расширять изучаемый в классе материал курса математики, который иногда выходит за рамки школьной программы. Все это приводит учителя к необходимости основательного знакомства с материалами прошедших олимпиад, с методикой его изложения и оценивания.

Данные материалы сборника подготовлены для проведения муниципального этапа олимпиады школьников по математике в г. Владимире. Они составлены в соответствии с ***методическими рекомендациями по разработке заданий для школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике,*** подготовленными Центральным оргкомитетом Всероссийской олимпиады школьников и опубликованными на сайте ***Всероссийская олимпиада школьников*** (http://www.rusolimp.ru).

Е.И. Антонова,
заведующая кафедрой
естественно-математического
образования ВИПКРО

Итоги муниципального этапа Всероссийской Олимпиады школьников 2009 года по математике

В городской математической Олимпиаде принимали участие 229 учащихся 7 – 11классов г. Владимира, из них 145 учащихся 7-9 классов и 84 учащихся 10-11 классов.

Профиль класса, в котором обучаются участники Олимпиады 10-11 классов:

- общеобразовательный – 45%
- физико-математический – 37%
- другие (естественно-научный, экономический и т.д.) – 18%.

Муниципальный этап Олимпиады проводился по Олимпиадным заданиям, разработанным предметно-методической комиссией регионального этапа Олимпиады, с учётом методических рекомендаций центральных предметно-методических комиссий Олимпиады. Учащимся были предложены задания, проверяющие степень информированности школьников в предметной области; задания, направленные на определение уровня интеллектуального развития; творческие задания.

Наибольшие затруднения вызвали геометрические и нестандартные задания. Основной трудностью учащихся является неумение пользоваться анализом для поиска решения, использование эвристических методов, комбинирование известных способов решения. Низкие результаты в общеобразовательных классах объясняются отсутствием факультативов и недостаточной индивидуальной работой с учащимися.

Основные выводы

- Учащиеся 7 класса показали неумение обосновать свое решение, неумение понять условие задач повышенного уровня, незнание приемов решения логических задач.
- Учащиеся 8 класса показали неумение приводить логическое обоснование к своему решению. Допустили много ошибок в определении модуля, при построении графика функции.
- Учащиеся 9 класса показали слабую подготовку по теме *«Подобие треугольников».* Допускали ошибки в ходе тождественных преобразований.
- Учащиеся 10 классов показали слабую подготовку по теме *«Арифметическая прогрессия».* Допускали ошибки при решении геометрической задачи, тригонометрического неравенства, в определении модуля.
- При подготовке учащихся 11 классов больше внимания уделять решению комбинаторных задач, использованию признаков делимости при решении нестандартных задач.

Анализ результатов по классам

класс	***кол-во участников***	***кол-во баллов призера***	***средний балл***		***отношение среднего балла к максимальному***	
			2008 год	*2009 год*	*2008 год*	*2009 год*
7	42	35	15,5	12	44%	34%
8	54	30	11,6	9	33%	30%
9	49	34	4	12	13,3%	35%
10	44	34	9,9	12	28%	35%
11	40	33	12	14	34%	35%

Анализируя результаты по классам, видим, что средний балл в 9-11 классах увеличился, в 7-8 классах снизился по сравнению с прошлым годом. Это объясняется тем, что уровень заданий для учащихся в 7-8 классов стал более высоким.

Отношение среднего балла к максимальному в 9-10 классах значительно увеличилось; в 11 классе стабильное, но по сравнению с 2005 годом увеличилось в 2 раза. Все это говорит о более серьезной подготовительной работе к математической Олимпиаде.

В основном, призерами муниципального этапа Всероссийской Олимпиады являются учащиеся профильных классов, где математика изучается в большем объеме. При этом акцент в организации учебных занятий переносится на освоение способов учебной деятельности, умение осуществлять поиск способа решения задачи, формирование умения оперировать усвоенными знаниями и умениями в новой ситуации.

ПОЛОЖЕНИЕ
об организации проведения школьного, муниципального, регионального этапов всероссийской Олимпиады школьников

Общие положения

1. Настоящее Положение об организации проведения школьного, муниципального, регионального этапов всероссийской Олимпиады школьников (далее – Олимпиада) составлено на основании Положения о всероссийской Олимпиады школьников, утверждённого приказом Минобрнауки России от 22 октября 2007 г. № 286.
2. Основными целями и задачами школьного, муниципального и регионального этапов Олимпиады являются выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности, создание необходимых условий для поддержки одаренных детей, пропаганда научных знаний.
3. В Олимпиаде принимают участие на добровольной основе обучающиеся государственных, муниципальных и негосударственных образовательных организаций, реализующих общеобразовательные программы.
4. Организаторами этапов Олимпиады являются:
   - школьный этап – образовательные организации (далее – организатор школьного этапа Олимпиады);
   - муниципальный этап – органы местного самоуправления муниципальных и городских округов в сфере образования (далее – организатор муниципального этапа Олимпиады);
   - региональный этап – департамент образования администрации Владимирской области (далее – организатор регионального этапа Олимпиады).
5. Олимпиада проводится по общеобразовательным предметам, перечень которых утверждается Министерством образования и науки Российской Федерации.
6. Этапы Олимпиады проводятся по заданиям, составленным на основе общеобразовательных программ, реализуемых на ступенях основного общего и среднего (полного) общего образования (далее – Олимпиадные задания).
7. Квоты на участие в каждом этапе Олимпиады определяются организатором соответствующего этапа Олимпиады. Квоты на участие в школьном этапе Олимпиады не устанавливаются.
8. Победители и призёры всех этапов Олимпиады определяются на основании результатов участников соответствующих этапов Олимпиады, которые заносятся в итоговую таблицу результатов участников соответствующих этапов Олимпиады, представляющую собой

ранжированный список участников, расположенных по мере убывания набранными ими баллов (далее – итоговая таблица). Участники с равным количеством баллов располагаются в алфавитном порядке.

9. Образцы дипломов победителей и призёров для всех этапов Олимпиады утверждаются Минобрнауки России.

10. Общее руководство проведением школьного, муниципального и регионального этапов Олимпиады и её организационное обеспечение осуществляют оргкомитеты соответствующих этапов.

11. Проверку выполненных Олимпиадных заданий школьного, муниципального, регионального этапов Олимпиады осуществляют жюри соответствующих этапов Олимпиады.

12. Состав жюри формируется, как правило, из числа научных и педагогических работников, аспирантов и студентов образовательных организаций высшего профессионального образования.

13. Жюри школьного, муниципального и регионального этапов Олимпиады:

- оценивает выполненные Олимпиадные задания;
- проводит анализ выполненных Олимпиадных заданий;
- рассматривает совместно с оргкомитетом соответствующего этапа Олимпиады апелляции;
- представляет в оргкомитеты соответствующих этапов Олимпиады аналитические отчёты о результатах проведения соответствующих этапов Олимпиады.

Порядок проведения школьного этапа Олимпиады

1. Школьный этап Олимпиады проводится организатором данного этапа Олимпиады в октябре. Конкретные даты проведения школьного этапа Олимпиады устанавливаются организатором муниципального этапа Олимпиады.

2. Для проведения школьного этапа Олимпиады организатором данного этапа Олимпиады создаются оргкомитет и жюри школьного этапа Олимпиады.

3. Школьный этап Олимпиады проводится по Олимпиадным заданиям, разработанным предметно-методической комиссией муниципального этапа Олимпиады, с учётом методических рекомендаций центральных предметно-методических комиссий Олимпиады.

4. В школьном этапе Олимпиады принимают участие обучающиеся 5-11 классов образовательных организаций, желающие участвовать в Олимпиаде.

5. Участники школьного этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов, признаются победителями школьного этапа Олимпиады при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможных баллов.

   В случае, когда победители не определены, в школьном этапе Олимпиады определяются только призёры.

6. Количество призёров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады.

7. Призёрами школьного этапа Олимпиады, в пределах установленной квоты, признаются все участники школьного этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

   В случае, когда у участника, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призёра, оказывается количество баллов такое же, как и у следующих за ним в итоговой таблице, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим равное с ним количество баллов, определяется следующим образом:

   все участники признаются призёрами, если набранные ими баллы больше половины максимально возможных;

   все участники не признаются призёрами, если набранные ими баллы не превышают половины максимально возможных.

8. Список победителей и призёров школьного этапа Олимпиады утверждается организатором школьного этапа Олимпиады.

9. Победители и призёры школьного этапа Олимпиады награждаются дипломами.

Порядок проведения муниципального этапа Олимпиады

1. Муниципальный этап Олимпиады проводится организатором данного этапа Олимпиады в ноябре-декабре. Конкретные даты проведения муниципального этапа Олимпиады устанавливаются организатором регионального этапа.

2. Для проведения муниципального этапа Олимпиады организатором данного этапа Олимпиады создаются оргкомитет, предметно-методические комиссии и жюри муниципального этапа Олимпиады.

3. Муниципальный этап Олимпиады проводится по Олимпиадным заданиям, разработанным предметно-методическими комиссиями регионального этапа Олимпиады, с учётом методических рекомендаций центральных предметно-методических комиссий Олимпиады.

4. В муниципальном этапе Олимпиады принимают участие обучающиеся 7-11 классов образовательных организаций – победители и призёры школьного этапа Олимпиады текущего учебного года.
5. Участники муниципального этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов, признаются победителями муниципального этапа Олимпиады при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможных.

   В случае, когда победители не определены, на муниципальном этапе Олимпиады определяются только призёры.
6. Количество призёров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты, установленной организатором регионального этапа Олимпиады.
7. Призёрами муниципального этапа Олимпиады, в пределах установленной квоты, признаются все участники муниципального этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

   В случае, когда у участника, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призёра, оказывается количество баллов такое же, как и у следующих в итоговой таблице за ним, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим с ним равное количество баллов, определяется следующим образом:

   все участники признаются призёрами, если набранные ими баллы больше половины максимально возможных;

   все участники не признаются призёрами, если набранные ими баллы не превышают половины максимально возможных.
8. Список победителей и призёров муниципального этапа Олимпиады утверждается организатором муниципального этап Олимпиады.
9. Победители и призёры муниципального этапа Олимпиады награждаются дипломами.

Порядок проведения регионального этапа Олимпиады

1. Региональный этап Олимпиады проводится организатором данного этапа Олимпиады в январе-феврале. Конкретные даты проведения регионального этапа Олимпиады устанавливаются Рособразованием.
2. Для проведения регионального этапа Олимпиады организатором данного этапа создаются оргкомитет и жюри регионального этапа Олимпиады.
3. Региональный этап Олимпиады проводится по Олимпиадным заданиям, разработанным центральными предметно-методическими комиссиями Олимпиады.

4. В региональном этапе Олимпиады принимают участие обучающиеся 9-11 классов образовательных организаций:

победители и призёры муниципального этапа Олимпиады текущего учебного года;

победители школьного этапа Олимпиады текущего учебного года из числа обучающихся образовательных организаций Российской Федерации, расположенных за пределами территории Российской Федерации в соответствии с закреплёнием их по субъектам Российской Федерации, определяемом Рособразованием;

победители школьного этапа Олимпиады текущего учебного года из числа обучающихся образовательных организаций военных городков и гарнизонов, расположенных в труднодоступных местностях, в соответствии с закреплением их по субъектам Российской Федерации, определяемом Рособразованием.

5. Победителями регионального этапа Олимпиады признаются участники регионального этапа, набравшие наибольшее количество баллов.

6. Призёрами регионального этапа Олимпиады в пределах установленной квоты признаются все участники регионального этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

В случае, когда у участника, определяемого в пределах установленной квоты в качестве призёра, оказывается количество баллов такое же, как и у следующих за ним в итоговой таблице, решение по данному участнику и всем участникам, имеющим с ним равное количество баллов, определяется следующим образом:

все участники признаются призёрами, если набранные ими баллы больше половины максимально возможных;

все участники не признаются призёрами, если набранные ими баллы не превышают половины максимально возможных.

7. Квота на количество победителей и призёров регионального этапа Олимпиады определяется организатором регионального этапа Олимпиады по согласованию с оргкомитетом регионального этапа Олимпиады и может составлять не более 25% от общего количества участников регионального этапа Олимпиады.

8. Список победителей и призёров регионального этапа Олимпиады утверждается организатором регионального этапа Олимпиады.

9. Победители и призёры регионального этапа Олимпиады награждаются дипломами.

10. Список всех участников регионального этапа Олимпиады с указанием набранных баллов заверяется организатором регионального этапа Олимпиады и направляется в Рособразование.

11. Финансовое обеспечение регионального этапа и методическое обеспечение муниципального этапа Олимпиады (за исключением расходов на проезд участников регионального этапа Олимпиады и сопровождающих их лиц к месту проведения регионального этапа и обратно и командировочных расходов на руководителей) осуществляется за счёт областного бюджета.

Общие принципы формирования комплектов заданий математических Олимпиад

- Нарастание сложности заданий от первого к последнему. При этом их трудность должна быть такой, чтобы с первым заданием могли успешно справиться примерно 70% участников, со вторым – более 50%, с третьим – около 20%, а с последними – лучшие из участников Олимпиады.
- Тематическое разнообразие заданий: в комплект должны входить задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике, в младших классах – по арифметике, логические задачи; в старших классах желательно включение задач по теории чисел, тригонометрии, стереометрии, математическому анализу. При этом допустимо и даже рекомендуется включение в варианты задач, объединяющих различные разделы школьной математики.
- Обязательная новизна задач для участников Олимпиады. В случае, когда задания выбираются из печатных изданий или из сети Интернет, методическая комиссия соответствующего этапа должна использовать источники, не известные участникам.
- Недопустимость включения в задания задач по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения Олимпиады.

Критерии оценивания

Задания математических Олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии с регламентом проведения математических Олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	***Правильность (ошибочность) решения***
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри. Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Победители и призеры Олимпиады определяются жюри в соответствии с итоговой таблицей. Список победителей и призеров утверждается организатором соответствующего этапа Олимпиады. Количество победителей и призеров Олимпиады не должно превышать 45% от общего числа участников Олимпиады. Важно отметить, что победителями Олимпиады являются ВСЕ участники, набравшие наибольшие баллы. Поэтому жюри может определить в любом классе более чем одного победителя.

Порядок проведения школьного этапа Олимпиады

Школьный этап Олимпиады проводится в один день в октябре для учащихся 5-11 классов.

Рекомендуемое время проведения Олимпиады: для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 4 урока.

Вариант должен содержать 4-6 задач разной сложности. Желательно, чтобы задания охватывали большинство разделов школьной математики, изученных к моменту проведения Олимпиады. Первые две (самые легкие) задачи варианта должны быть доступны подавляющему большинству участников. В качестве сложных задач рекомендуется включать в вариант задачи, использующие материал, изучаемый на факультативных занятиях.

Рекомендуется подготовка заданий для школьного этапа Олимпиады муниципальными предметно-методическими комиссиями по математике.

Порядок проведения муниципального этапа Олимпиады

Муниципальный этап Олимпиады проводится в один день в ноябре-декабре для учащихся 6-11 классов.

Рекомендуемое время проведения Олимпиады – 4 часа.

Вариант должен содержать 5-6 задач разной сложности. Обязательным является требование включения в вариант заданий по темам, изученным к моменту проведения Олимпиады в соответствии с программами всех базовых учебников по математике. Первые две (самые легкие) задачи варианта должны быть доступны подавляющему большинству участников. Рекомендуется подготовка заданий для муниципального этапа Олимпиады региональными предметно-методическими комиссиями по математике.

Задания школьного и муниципального этапов Олимпиады

Олимпиадные задания школьного и муниципального этапов составляются на основе программ по математике для общеобразовательных учебных учреждений. Также допускается включение задач, тематика которых входит в программы школьных кружков (факультативов). Ниже приводятся только те темы, которые рекомендуется использовать при составлении вариантов заданий текущего учебного года. Важно отметить, что в силу специфики регионов и различий в степени доступности участникам Олимпиады тех или иных источников задач, сложности в составлении (подборе) задач предлагаемой тематики необходимой для данной территории трудности, предметно-методические комиссии могут менять рекомендуемую тематику заданий, сохраняя в целом структуру варианта.

Тематика заданий
школьного этапа Олимпиады
(2009/2010 уч.г.)

5 класс	**1.** Арифметика. **2.** Числовой ребус. **3.** Задача на построение примера (разрезание фигур, переливания, взвешивания). **4.** Логические или текстовые задачи.
6 класс	**1.** Арифметика (дроби, числовые ребусы). **2.** Задача на составление уравнения. **3.** Фигуры, нахождение многоугольника с указанными свойствами. **4.** Логическая задача.
7 класс	**1.** Числовой ребус. **2.** Задача на составление уравнений. **3.** Делимость натуральных чисел. Признаки делимости **4.** Задача на разрезание фигур. **5.** Логическая задача.
8 класс	**1.** Нахождение числа с указанными свойствами. **2.** Построение графиков функций. **3.** Преобразование алгебраических выражений. **4.** Основные элементы треугольника. **5.** Логическая задача на четность.
9 класс	**1.** Делимость, четность. **2.** Квадратный трехчлен. Свойства его графика. **3.** Основные элементы треугольника. **4.** Алгебра (неравенство или задача на преобразования алгебраических выражений). **5.** Логическая (комбинаторная) задача
10 класс	**1.** Нахождение числового множества, обладающего указанными свойствами. **2.** Прогрессии. **3.** Площадь. Подобие фигур. **4.** Система уравнений. **5.** Логическая (комбинаторная) задача.
11 класс	**1.** Рациональные и иррациональные числа **2.** Тригонометрические уравнения **3.** Окружность. Центральные и вписанные углы **4.** Многоугольники. **5.** Комбинаторика.

Тематика заданий
муниципального этапа Олимпиады
(2009/2010 уч.г.)

6 класс	**1.** Задача на составление уравнения. **2.** Задача на проценты. **3.** Фигуры (площадь, разрезания). **4.** Числовая задача (построение примера, доказательство невозможности его построения). **5.** Логическая задача.
7 класс	**1.** Числовой ребус. **2.** Задача на составление уравнений. **3.** Делимость натуральных чисел. Признаки делимости. **4.** Задача на разрезание фигур **5.** Логическая задача.
8 класс	**1.** Числовой ребус или задача на нахождение набора чисел, обладающего заданными свойствами. **2.** Построение множества точек на плоскости с указанными свойствами. **3.** Признаки равенства треугольников. **4.** Неравенство или задача на преобразования алгебраических выражений. **5.** Логическая задача.
9 класс	**1.** Построение множества точек на плоскости с указанными свойствами или задача на четность. **2.** Задача на составление уравнений. **3.** Теорема Фалеса, подобие треугольников. **4.** Неравенство или задача на преобразования алгебраических выражений. **5.** Комбинаторная задача.
10 класс	**1.** Задача на свойства квадратичной функции. **2.** Теория чисел (делимость, остатки, четность). **3.** Окружность. Центральные и вписанные углы. **4.** Алгебра (неравенства, прогрессии). **5.** Комбинаторная задача.
11 класс	**1.** Тригонометрия. **2.** Задача про многочлены (теорема Безу) или квадратичные функции (теорема Виета). **3.** Теория чисел (делимость, остатки, четность). **4.** Стереометрия. **5.** Комбинаторная задача.

Олимпиадные задачи 2 тура предметных Олимпиад школьников по математике

2005 год

9 класс

1. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100 101 102 … 998 999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?

2. По определению, ***n! = 1·2·3·…·n.*** Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения ***1!·2!·3!·…·20!***, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

3. С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.

4. Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20°?

5. На столе лежат 2005 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй – любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

10 класс

1. Докажите, что уравнение $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0$ не имеет решений.

2. Докажите, что в ходе любого сыгранного футбольного матча был момент, когда одна из команд забила голов столько же, сколько другой осталось забить.

3. Хорда удалена от центра окружности на расстояние ***h***. В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписан квадрат так, что пара его соседних вершин лежит на хорде, а другая пара соседних вершин – на соответствующей дуге окружности. Найдите разность длин сторон квадратов.

4. Найдите многочлен с целочисленными коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

5. Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д. Чему равен 2005-й член этой последовательности?

11 класс

1. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.

2. Решите уравнение $\sin^4 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cdot \cos^4 x$.

3. Существует ли многогранник с нечетным числом граней, каждая из которых есть многоугольник с нечетным числом сторон?

4. Докажите, что касательные к гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ образуют с осями координат треугольники одной и той же площади.

5. В каждую клетку квадратной таблицы 25×25 вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.

2006 год

6 класс

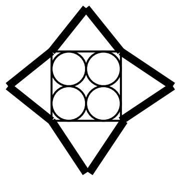
1. Разность двух чисел на 17 меньше уменьшаемого и на 9 больше вычитаемого. Найдите уменьшаемое и вычитаемое.

2. Будет ли сумма чисел 1 + 2 + 3 + …..+ 2005 + 2006 + 2007 делиться на 2007? Ответ обоснуйте.

3. Нужно разместить 17 кроликов так, чтобы в каждой клетке было разное количество кроликов. Какое наибольшее число клеток понадобится?

4. На выставку привезли 25 собак. 12 из них большие, 8 – маленькие, остальные средние. Только 10 из участников выставки породистые, остальные – дворняжки. Среди дворняжек поровну больших, маленьких и средних. Сколько больших породистых собак привезли на выставку?

5. Все треугольники, изображенные на рисунке, имеют равные стороны. Радиус каждой из окружностей равен 2 см. Окружности касаются друг друга и сторон квадрата. Чему равен периметр «звездочки», нарисованной жирной линией?



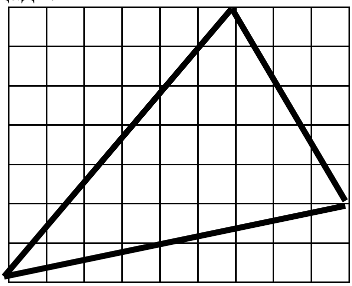
7 класс

1. Восстановите пример: АВС × СВА = 692443.

2. За весну Обломов похудел на 25%, затем за лето поправился на 20%, затем за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он в итоге или поправился? Ответ обоснуйте.

3. Какой цифрой оканчивается число 2007^{2006}?

4. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисован треугольник. Чему равна его площадь?



5. У мамы четыре дочери Поля, Валя, Катя и Маша. Девочки играли и разбили вазу. На вопрос: «Кто это сделал?» Поля, Валя и Катя ответили: «Не я», а Маша – «не знаю». Потом оказалось, что две из них сказали правду, а две неправду. Знает ли Маша, кто разбил вазу? Ответ объясните.

8 класс

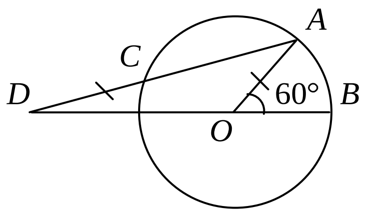
1. Решите уравнение $x-6=\frac{|x-3|}{x-3}$.

2. Верно ли равенство $3^{100}+7^{100}=8^{100}$? Ответ обоснуйте.

3. Дворники получают грабли и метлы. Если каждый возьмет одну метлу или одни грабли, то останется 14 метел. А чтобы дать каждому дворнику и одну метлу, и одни грабли, не хватает 10 грабель. Сколько было дворников, сколько метел и сколько грабель?

4. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал туземца узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген». Кем был проводник: пришельцем или аборигеном? Ответ обоснуйте.

5. В окружности с центром в точке О проведены радиусы ОВ и ОА так, что $\angle$AOB=60°, OB = DC. Найдите величину $\angle$ADO.



9 класс

1. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.

2. Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т.д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно 1/2, 1/3, 1/4 и т.д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2007 переливаний?

3. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 8x + 6} + \sqrt{4x - x^2 - 3} < x - 1$.

4. Решите уравнение $x^2 + 2005x - 2006 = 0$.

5. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

10 класс

1. Решите уравнение $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = 1320$.

2. На плоскости дан отрезок АВ. Где может быть расположена точка С, чтобы ΔABC был остроугольным?

3. Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006, которые после зачеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

4. Вычислить сумму $a^{2006} + \dfrac{1}{a^{2006}}$, если $a^2 - a + 1 = 0$.

5. Лист бумаги разрезали на 5 частей, некоторые из этих частей разрезали на 5 частей, и т.д. Может ли за некоторое число разрезаний получиться 2006 листка бумаги?

11 класс

1. Докажите, что уравнение $xy = 2006\,(x+y)$ имеет решения в целых числах.

2. Докажите, что если α, β, γ - углы произвольного треугольника, то справедливо тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

3. Три шара радиуса R касаются друг друга и плоскости ***α***, четвертый шар радиуса R положен сверху так, что касается каждого из трех данных шаров. Определите высоту «горки» из четырех шаров.

4. Докажите неравенство $x^2 - 3x^3 < \frac{1}{6}$ на луче $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

5. В прямоугольник 20×25 бросают 120 квадратов 1×1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг с диаметром, равным 1, не имеющий общих точек ни с одним из квадратов.

2007 год

6 класс

1. Если Коля купит 11 тетрадей, то у него останется 7 рублей, а на покупку 15 тетрадей ему не хватит 5 рублей. Сколько денег у Николая? Ответ обоснуйте.

2. Какова последняя цифра ответа 2003 · 2005 · 2007 – 2000 · 2008? Ответ обоснуйте.

3. Как разложить семь алмазов в четыре одинаковые шкатулки, чтобы вес всех шкатулок получился одинаковым, если вес алмазов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. граммов. Ответ обоснуйте.

4. На одной чаше весов лежит кусок мыла, на другой $\frac{2}{3}$ такого же куска и еще $\frac{2}{3}$ кг. Сколько весит весь кусок мыла? Ответ обоснуйте.

5. Четыре ученика – Витя, Петя, Юра и Сергей – заняли на математической Олимпиаде четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:

а) Петя – второе, Витя – третье;
б) Сергей – второе, Петя – первое;
в) Юра – второе, Витя – четвертое.

Укажите, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть. Ответ обоснуйте.

7 класс

1. Не выполняя деления, выясните, делится ли значение выражения $37 \cdot 124 + 21 \cdot 124 + 58 \cdot 554$ на 678. Ответ обоснуйте.

2. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Когда одного игрока удалили с поля, средний возраст оставшихся игроков составил 21 год. Сколько лет удаленному игроку? Ответ обоснуйте.

3. Какова сумма всех цифр, используемых для записи всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000? Ответ обоснуйте.

4. 2% натурального числа A больше, чем 3% натурального числа B. Верно ли, что 5% числа A больше, чем 7% числа B? Ответ обоснуйте.

5. Ваня, Петя, Саша и Коля носят фамилии, начинающиеся на буквы В, П, С и К. Известно, что

a. Ваня и С. – отличники;
b. Петя и В. – троечники;
c. В. ростом выше П.;
d. Коля ростом ниже П.;
e. Саша и Петя имеют одинаковый рост.

На какую букву начинается фамилия каждого мальчика? Ответ обоснуйте.

8 класс

1. Решите уравнение $|x-2007| = 2$.

2. Какова сумма всех цифр, используемых для записи всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000? Ответ обоснуйте.

3. В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60% мальчиков сосед по парте - тоже мальчик, а у 20% девочек сосед по парте - тоже девочка. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки?

4. Дана белая доска размером 100×100 клеток. Двое по очереди красят ее клетки в черный цвет, причем первый всегда закрашивает квадрат 2×2, а второй три клетки, образующие «уголок». Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй? Ответ обоснуйте.

5. Найдите сумму внешних углов выпуклого 2007-угольника. Ответ обоснуйте.

9 класс

1. В параллелограмме ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M и прямую AB в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если AK = 12, CM = 24, MK = 18.

2. Постройте график функции $y = |x-1| - |2-x| + 2$.

3. Вычислите $\sqrt{2001\cdot 2003\cdot 2005\cdot 2007+16}$.

4. Решите уравнение $x^4 + 2006x^2 - 2007 = 0$.

5. Токарь и его ученик, работая одновременно, обычно выполняют задание за 4 часа. При этом производительность труда токаря в 2 раза выше производительности ученика. Получив такое же задание, и, работая по очереди, они справились с заданием за 9 часов работы. Какую часть задания выполнил ученик токаря.

10 класс

1. Вычислите $\sqrt{2001\cdot 2003\cdot 2005\cdot 2007+16}$.

2. Решите уравнение $3\cos x = x^2 + 3$.

3. Постройте график функции $y = |x-3| + |1-x| - 4$.

4. Докажите, что $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

5. Пирамида Хеопса имеет в основании квадрат, а ее боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Может ли угол грани при вершине пирамиды быть равным 95°? Ответ обоснуйте.

11 класс

1. Решите уравнение $\sqrt{(3-2x)^2+4} = 2-\sin^2\dfrac{4\pi x}{3}$.

2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве всех действительных чисел и является периодической с периодом 5. Найдите значение выражения $f(-6) + f(19) - f(-13)$, если $f(-1) = -2$ и $f(2) = 3{,}5$.

3. Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба со стороной 1 см? Ответ обоснуйте.

4. Докажите, что $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равняется $\boldsymbol{a}$, а боковое ребро равняется $\boldsymbol{b}$**.** Плоскость, параллельная боковому ребру и проходящая через скрещивающуюся с ним сторону основания, пересекает пирамиду по квадрату. Вычислите сторону квадрата.

2008 год

7 класс

1. Найдите все корни уравнения $|x - 2008| = 2009$.

2. Гонцу надо было пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать остаток пути так, чтобы его средняя скорость на всем пути оказалась равной 12 миль в час?

3. Дима взял 2008 одинаковых квадратиков. Он хочет сложить из всех этих квадратиков прямоугольник. Сколько различных прямоугольников он может получить?

4. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго – 85, без третьего – 80, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?

5. Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2008-м месте?

8 класс

1. Корень из числа 49 можно извлечь по такой «формуле»: $\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9}$.

2. Существуют ли другие двузначные числа, квадратные корни из которых извлекаются аналогичным образом и являются целыми? Укажите все такие двузначные числа.

3. ABC – равнобедренный треугольник с вершиной A. $\angle A = 27°$. Точка D симметрична точке B относительно A. Чему равен угол $\angle BCD$?

4. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?

5. Про числа a и b известно, что $a = b + 1$. Может ли оказаться так, что $a^4 = b^4$?

6. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 нужно закрасить, чтобы в любом квадрате 3×3, являющемся его частью, было ровно 4 закрашенных клетки?

9 класс

1. Докажите, что число $2008^2 + 2008^2 \cdot 2009^2 + 2009^2$ является ли квадратом целого числа.

2. Рассматриваются функции вида $y = x^2 + ax + b$, где $a + b = 2008$. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.

3. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли Вы за «Спартак»?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Локомотив» - 50%, а про ЦСКА – 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Спартак»?

4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = \angle B = \angle D = 90°$. Найдите $\angle ADB$, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.

5. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов четно. Один из столбов покрашен в желтый цвет, другой - в синий, а остальные – в белый. Назовем расстояние между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до желтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2008 км.

10 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1; 1)$. Сравните $a^5 + d^6$ и $c^6 - b^5$.

2. Какое наибольшее число ребер шестиугольной призмы может пересечь плоскость, не проходящая через вершины призмы?

3. Решите уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2007}+\sqrt{x+2009}}=1.$$

4. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то их высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.

5. В клетки квадрата 3×3 требуется вписать девять различных натуральных чисел так, чтобы все они не превосходили ***n***, и чтобы произведения чисел в каждой строке и каждом столбце были равны. При каком наименьшем ***n*** это возможно?

11 класс

1. Найдите такое натуральное число ***k***, что 2008! делится на 2007^k, но не делится на 2008^k. (Напомним, что $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n$).

2. Может ли вершина параболы $y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении a?

3. (a_n) – арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S_{2008} - наименьшая среди всех S_n (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?

4. Внутри равностороннего треугольника со стороной 8 находится равнобедренный треугольник ABC, в котором AC = BC = 1, $\angle C=120°$. Две вершины A и B могут лежать либо на одной стороне большого треугольника, либо на двух. Где при этом может оказаться вершина тупого угла – точка C? Нарисуйте это геометрическое место точек и найдите длину соответствующей линии.

5. Клетчатая прямоугольная сетка m×n связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?

2009 год

7 класс

1. В данном примере различные цифры зашифрованы различными буквами. Определите, какое равенство зашифровано: **ОТВЕТ + ОЧЕНЬ = ПРОСТ.**

2. В спортивной секции девочки составляют 60% числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки?

3. Найти наименьшее шестизначное число, делящееся на 9, все цифры которого различны.

4. Можно ли квадрат со стороной 1 м разрезать на 7 прямоугольников, не обязательно одинаковых, каждый из которых имел бы периметр 2 м?

5. Можно ли покрасить клетчатый квадрат 2009×2009 в два цвета – черный и белый (каждая единичная клетка красится одним из этих цветов) – таким образом, чтобы каждая черная клетка имела двух белых соседей, а каждая белая клетка – двух черных соседей (соседями считаем клеточки, которые имеют общую сторону)? Ответ обоснуйте.

8 класс

1. Докажите, что $13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 +\ldots+ 13^{2009} + 13^{2010}$ делится нацело на 7.

2. Постройте график функции $y = |x - 2| - 2$.

3. На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC взяты соответственно точки D, E, F, так что AD = BE = CF. Каков вид треугольника DEF? Докажите.

4. Известно, что $a + b + c = 5$, $ab + ac + bc = 5$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

5. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели по веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседнее дерево – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

9 класс

1. На доске написаны восемь простых чисел, каждое из которых больше двух. Может ли их сумма равняться 59?

2. В хоре число девочек относилось к числу мальчиков как 4:3. После того как в хор пришли двое новеньких, это соотношение стало 3:2. Сколько мальчиков было в хоре вначале?

3. В четырехугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке M. Известно, что AM = 1, BM = 2, CM = 4. При каких значениях DM четырехугольник ABCD является трапецией?

4. Сравните числа $\sqrt{2011}+\sqrt{2009}$ и $2\sqrt{2010}$.
5. Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое знакомых или трое незнакомых между собой людей.

10 класс

1. Пусть a + b + c < 0 и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Какой знак имеет число c?

2. Докажите, что уравнение xy = 2009 (x + y) имеет решения в целых числах.

3. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Определить углы треугольника.

4. (a_n) – арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S_{2009} - наименьшая среди всех S_n (меньше суммы первых *n* членов для любого другого значения *n*). Какие значения может принимать первый член прогрессии?

5. Имеется три кучи камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20 камней. За ход разрешается разбить любую кучу на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто победит – начинающий или его партнер?

11 класс

1. Постройте график функции

$$y = \sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3}$$

2. Определите *a* так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ была наименьшей.

3. Докажите, что если число $\underbrace{11...11}_{n\ единиц}2\underbrace{11...11}_{n\ единиц}$ делится на 11, то оно также делится и на 121.

4. Длины четырех отрезков (числа a, b, c, d) удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Верно ли, что объем куба, ребро которого равно одному из этих отрезков, равен объему прямоугольного параллелепипеда, тремя ребрами которого являются три другие отрезка?

5. Даны n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

Ответы и решения задач 2 тура предметных Олимпиад школьников по математике

2005 год

9 класс

1. Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20. Таких чисел 9: 120, 220, …, 920. Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, …, 209. Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.

2. Заметим, что

$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot\ldots\cdot 20! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot\ldots\cdot (19! \cdot 20!) =$

$= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdot (5! \cdot 5! \cdot 6) \cdot\ldots\cdot (17! \cdot 17! \cdot 18) \cdot (19! \cdot 19! \cdot 20) =$

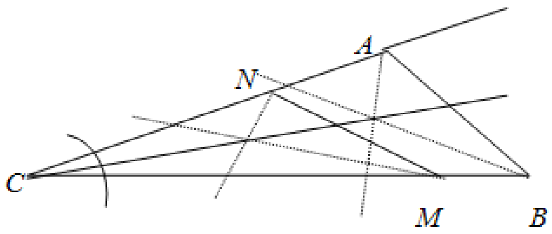
$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot\ldots\cdot (19!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot\ldots\cdot 18 \cdot 20) =$

$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot\ldots\cdot (19!)^2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot\ldots\cdot (10 \cdot 2)) =$

$= (1! \cdot 3! \cdot\ldots\cdot 19!)^2 \cdot 2^{10} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot\ldots\cdot 2 \cdot 10) = (1! \cdot 3! \cdot\ldots\cdot 19!)^2\, (2^5)^2 \cdot 10!$

Мы видим, сто первые два множителя – квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат. Легко видеть, что вычеркивание других множителей, указанных в ответах, не дает желаемого результата. Ответ: 10!

3. Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из них. Выберем на сторонах угла произвольно по 2 точки: *A*, *N*, *B*, *M* и рассмотрим треугольники *ABC* и *NMC*. Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов. Точка пересечения биссектрис углов треугольника *ABC* принадлежит и биссектрисе угла *C*. Аналогично, точка пересечения 2 биссектрис углов треугольника *NMC* также лежит на биссектрисе угла *C*. Проводим через эти 2 точки прямую, которая будет и биссектрисой $\angle C$.



4. Есть только один треугольник, в котором угол 20° лежит между сторонами 5 см и 6 см. Попробуем построить треугольник, в котором сторона 6 см прилегает к углу 20°, а сторона 5 см лежит против него. Для этого от вершины угла отложим отрезок длиной 6 см, и проведем окружность радиуса 5 см с центром этого отрезка, несовпадающем с вершиной. Расстояние от центра этой окружность до второй стороны угла меньше 5 см (это расстояние равно катету угла в 20°). Отсюда следует, что окружность пересечет прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках, причем из-за того что радиус меньше 6 см, обе эти точки будут лежать на стороне угла, и мы получим два разных треугольника.
Если же попробовать поменять ролями отрезки в 5 см и 6 см, то вершина угла окажется внутри построенной окружности, и мы получим только одну точку пересечения, а следовательно, и один треугольник.
Итак, мы получили всего 4 треугольника.

5. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 85 монет. Каждым следующим, если второй игрок берет x монет, то первый игрок должен взять $101 - x$ монет (он всегда может это сделать, потому что если x – четное число от 2 до 100, то $(101 - x)$ – нечетное число от 1 до 99). Так как $2005=101\cdot 19 + 85 + 1$, то через **19** таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т.е. проиграет.

10 класс

1. Уравнение $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0$ преобразовать к виду $(x^2 - 2x)^2 + 8(x - 1{,}5)^2 + 6 = 0$, которое не имеет решений.

2. Пусть первая из команд забила за весь матч m голов, вторая n голов. Сумма числа голов в ходе матча изменяется с шагом 1 от 0 до $m + n$, значит, в какой-то момент она будет равна m. Данный момент и будет искомым в задаче, потому что при этом число голов, уже забитых второй командой, равно разности m и числа голов, уже забитой первой командой, т.е. числу голов, которое еще предстоит забить первой команде. Аналогично можно рассуждать и с первой командой.

3. Обозначим длины сторон большого и малого квадратов через $2x$ и $2y$ соответственно, радиус окружности – через R. Тогда расстояния от центра окружности до вершин вписанных квадратов, лежащих на окружности дают выражения $(2x - h)^2 + x^2 = R^2$, $(2y + h)^2 + y^2 = R^2$. Отсюда получим $x - y = \frac{4}{5}h$. Тогда, разность длин сторон квадратов будет равна $\frac{8}{5}h$.

4. Обозначим $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$. Тогда $a^2 = 5+2\sqrt{6}$, а $(a^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2$ или $a^4 - 10a^2 + 25 = 24$, которое равносильно $a^4 - 10a^2 + 1 = 0$. А это и означает, что a является корнем многочлена $x^4 - 10x^2 + 1$.

5. 2005-й член последовательности равен наименьшему натуральному числу n, для которого $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\geq 2005$. Последнее неравенство будет равносильно неравенству $n^2 + n - 4010 \geq 0$. Решением данного квадратного неравенства (с учетом того, что n – натуральное) будет $n\geq\dfrac{-1+\sqrt{16041}}{2}\approx 62{,}83$. Значит, последний член последовательности будет **63**.

11 класс

1. Пусть это 4 последовательных числа: n, n + 1, n + 2, n + 3.

Тогда $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 =$
$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

2. Перенесем в левую часть $2\sin 4x \cdot \cos^4 x$ и прибавим и вычтем по $\cos^8 x$. В результате полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$(\sin 4x - \cos^4 x)^2 + \cos^2 x(1 - \cos^6 x) = 0,$$

которое равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}\sin 4x-\cos^4 x=0,\\ \cos^2 x(1-\cos^6 x)=0.\end{cases}$$

Решая второе уравнение и подставляя его решения в первое уравнение, в результате получим решение исходного уравнения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$.

3. Пусть такой многогранник существует. Обозначим за $k_1, k_2, \ldots, k_n$ число ребер на гранях, тогда $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2l$ – удвоенная сумма всех ребер многогранника, она – четная. А в левой части стоит нечетная сумма слагаемых, каждое из которых – нечетно. Получили противоречие. Значит, такого многогранника не существует.

4. Составим уравнение касательных к гиперболе в точке $\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$.

Т.к. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, то эти уравнения будут иметь вид $y=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)+\dfrac{1}{x_0}$. **(*)**

Касательная с уравнением (*) пересекает ось абсцисс в точке (x_1;0); x_1 можно определить из уравнения $-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0}=0$. Решая данное уравнение, получим $x_1 = 2x_0$. Точка (0; y_1) пересечения с осью ординат определяется подстановкой в уравнение (*) значения $x = 0$. В итоге получим $y_2 = \frac{2}{x_0}$. Отрезки осей координат и касательной составляют прямоугольный треугольник, катеты которого имеют длины $a = 2|x_0|$ и $b = \frac{2}{|x_0|}$. Площадь данного треугольника равна **2**.

5. Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т.е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50). Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно -1, т.е. слагаемых с -1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

2006 год

6 класс

1. Ответ: 43 – 17.

2. Ответ: будет.
Представим данную сумму в виде следующих слагаемых: (1 + 2006) + + (2 + 2005) + …..+ (1003 + 1004) + 2007. Так как каждое слагаемое делится на 2007, то и вся сумма будет делиться на 2007.

3. Ответ: 5 клеток.

4. Ответ: 7 больших породистых собак.

5. Ответ: 64 см

7 класс

1. Ответ: 739 ×937 = 692443.

2. Ответ: Обломов похудел.

3. Ответ: число оканчивается цифрой 9.

4. Ответ: 25,5 см^2

5. Среди ответов Поли, Вали и Кати может быть только один ложный ответ, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое. Тогда вторым ложным ответом будет ответ Маши. Значит, Маша знала, кто разбил стекло.

8 класс

1. Ответ: 7.

2. Решение: Нет. 3^{100} оканчивается 1, 7^{100} оканчивается 1, а 8^{100} оканчивается 6.

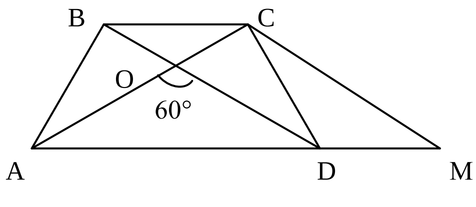
3. Ответ: 24 дворника, 24 метлы и 14 грабель.

4. Ответ: Проводник был аборигеном.

5. Ответ: $\angle CDO = 20°$.

9 класс

1. Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ΔACM - равносторонний. Но это значит, что ΔAOD и ΔBOC - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ΔAOB = ΔCOD, откуда имеем, что AB = CD.



2. «Просчитав» несколько первых переливаний, нетрудно обнаружить, что после первого, третьего, пятого переливаний в обоих сосудах будет по ½ л воды. Необходимо доказать, что так будет после любого переливания с нечетным номером. Если после переливания с нечетным номером 2k-1 в сосудах было по ½ л, то при следующем переливании из второго сосуда берется $\frac{1}{2k+1}$ часть, так что в первом сосуде оказывается $-\frac{1}{2}+\frac{2}{2(2k+1)}=\frac{k+1}{2k+1}$ (л). При следующем переливании, имеющем номер 2k+1, из него берется $\frac{1}{2k+2}$ часть и остается $\frac{k+1}{2k+1} - \frac{k+1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2}$ (л). Поэтому после седьмого, девятого и вообще любого нечетного переливания в сосудах будет по ½ л воды.

3. Заметим, что все решения исходного неравенства существуют, если подкоренные выражения неотрицательны. Одновременно эти неравенства выполняются лишь при условии $x^2 - 4x + 3 = 0$. Это уравнение имеет два корня 1 и 3. Проверка показывает, что исходное неравенство имеет единственное решение 3.

4. Исходное уравнение имеет очевидный корень 1. Второй корень найдем по формулам Виета. Так как $x_1x_2 = -2006$ и $x_1 = 1$, то $x_2 = 2006$.

5. Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.