Большая перемена

Э.Н. Балаян

ЛУЧШИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

7–11 классы

Ростов-на-Дону
Феникс
2011

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Лучшие олимпиадные задачи по математике : 7–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2011. — 318 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-18285-7

В предлагаемой вниманию читателя книге содержатся олимпиадные задачи разного уровня сложности для учащихся 7–11 классов.

Часть задач посвящена таким уже ставшим классическими темам, как решение уравнений в целых числах, делимость и остатки, принцип Дирихле, монотонность и др.

Ко многим задачам даны решения различными способами, к остальным — ответы и указания. Авторские задачи отмечены значком (А).

В конце книги приводятся необходимые справочные материалы по алгебре и геометрии.

Пособие адресовано ученикам 7 –11 классов для подготовки к олимпиадам различного уровня, в том числе старшеклассникам для подготовки к ЕГЭ, учителям математики, студентам педвузов, работникам центров дополнительного образования, репетиторам.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-18285-7 ББК 22.1я721

Предисловие

С каждым годом роль олимпиад становится все более значимой, если учесть, что победителей, занявших призовые места, стали зачислять в вузы без сдачи ЕГЭ и вступительных экзаменов.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решений. Наличие разнообразных идей, применяемых при решении задач, таких как решение уравнений в целых числах, принцип Дирихле, делимость и остатки, неравенство Коши—Буняковского, монотонность функций, логические задачи, функциональные уравнения и др., способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять аналогичные, возможно, более оригинальные задачи, что в итоге часто приводит к творческим открытиям в различных областях математики.

Книга состоит из трех разделов.

В первом разделе приводятся условия задач для 7–11 классов. Все авторские задачи отмечены значком (А), составлены и решены на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Во втором разделе книги приводятся ответы, указания и решения к наиболее трудным задачам. Кроме того, часть задач решена различными способами с тем, чтобы читатель мог ознакомиться с сущностью рационального решения.

Автор настоятельно рекомендует обращаться к решениям в крайнем случае, лишь когда задача уже решена, или после многократных, но безуспешных попыток ее решить. Только в этом случае работа над задачей принесет огромную пользу.

Для удобства пользования книгой *в третьем разделе* приводятся необходимые справочные материалы по алгебре и геометрии.

Пособие предназначено прежде всего ученикам 7–11 классов общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, для самостоятельной и эффективной подготовки к олимпиадам различного уровня, старшеклассникам для подготовки к ЕГЭ, учителям математики, студентам педвузов, репетиторам.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

1(А). Найти наименьшую пару натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $2010x - 2009y = 2011$.

2(А). Произведение первой цифры числа на оставшуюся часть равно 57, а произведение последней цифры числа на оставшуюся часть равно 105. Найти это число.

3(А). В турнире по футболу участвовало 7 команд, которые набрали 14, 13, 9, 8, 7, 4 и 3 очка. За победу присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Сколько матчей в турнире закончилось вничью?

4. Решить в натуральных числах уравнение $\overline{xxyy} = z^2$.

5. Сколько существует натуральных чисел, каждое из которых превышает сумму своих цифр на произведение этих цифр?

6. Разложить многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на три множителя.

7(А). Найти x, если $x^2 = 2009 \cdot 2011 + 1$, $x < 0$.

8(А). Решить уравнение $(x + y)^2 = 3(x + 3)(x - 3)$.

9(А). Имеется 2011 переключателей. Изначально они все выключены. Разрешается выбрать любые два и перевернуть их в противоположное положение (т. е. выключенные включить, а включенные — выключить). Можно ли, проделав несколько раз эту операцию, привести их все во включенное состояние?

10(А). Построить график уравнения $|y|y = \dfrac{|x|}{x}$.

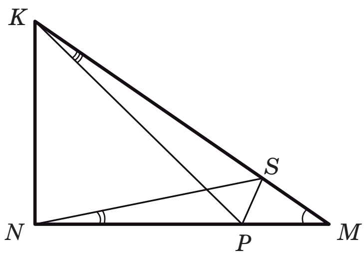
11. Найти наименьшее число, делящееся на 7, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает в остатке 1.

12. Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{БУЛОК} \\ +\ \underline{\ \ \text{БЫЛО}} \\ \text{МНОГО} \end{array}$$

Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

13(А). В ΔKNM $\angle N = 90°$, $\angle M = 35°$, $\angle PKS = 10°$, $\angle SNP = 20°$. Найти $\angle PSN$.



14(А). Решить в целых числах уравнение

$$13x - 15y = 7.$$

15(А). Число 7 возвели в 19-ю степень. Полученное число вновь возвели в 19-ю степень и т. д. Возведение повторено 2011 раз. Определить последнюю цифру полученного числа.

16. Решить уравнение $2x + 1 = y^3$ в натуральных числах, где x — простое.

17. Скорость автобуса от пункта A до пункта B равна 40 км/ч, а обратно — 60 км/ч. Какова средняя скорость автобуса?

18(А). Упростить выражение

$$\sqrt{20-2\sqrt{91}}+\sqrt{20+2\sqrt{91}}.$$

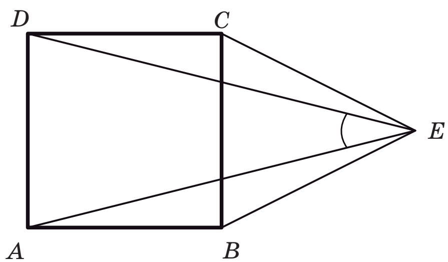
19. Разрезать прямоугольник со сторонами 4 и 9 см на наименьшее число частей так, чтобы сложить из них квадрат.

20. Доказать, что двучлен $2a^4 + 2b^4$ можно представить в виде суммы квадратов двух двучленов.

21(А). Представить двучлен $3x^4 + 16$ в виде суммы трех квадратов.

22(А). Построить график уравнения $|x| + |y| = 2x$.

23. Дан квадрат $ABCD$, $AD = CE = BE$. Найти $\angle AED$.



24(А). 100 мышей за 100 дней съедают 200 кг крупы. Сколько зерна съедят 10 мышей за 10 дней?

25. Чему равен угол между биссектрисами смежных углов?

26(А). Вычислить $a^{2010}+\dfrac{1}{a^{2010}}$, если $a+\dfrac{1}{a}=-1$.

27(А). Доказать, что число n^3+17n делится на 6 при любом натуральном n.

28. Дан угол в $54°$. Как с помощью циркуля и линейки разделить его на 3 равных угла?

29(А). Найти два числа, разность и частное которых были бы равны 11.

30. Доказать, что при любых $x \neq 0$, $y \neq 0$ значение выражения $x^2+xy+y^2>0$.

31(А). Две стороны треугольника имеют длины 3 дм и 4 дм, а третья сторона выражается числом, которое делится на 4. Найти длину третьей стороны.

32(А). Найти два числа, сумма и частное которых были бы равны 4.

33(А). Длину каждой стороны квадрата увеличили на 40%. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

34. В прямоугольнике вырезали дырку прямоугольной формы. Провести прямую линию, которая разделит образовавшуюся фигуру (прямоугольник с дыркой) на две части равной площади.

35(А). Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2-y^2=13$.

36(А). Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

37. Можно ли обойти шахматную доску «хромым» королем (он не умеет передвигаться по диагонали), начав с поля « $a1$» и закончив на поле « $h8$», побывав при этом на каждой клетке ровно по одному разу?

38. Доказать, что произведение трех последовательных целых чисел, сложенное со вторым из них, равно кубу второго числа.

39(А). Построить график функции $x+\frac{|y|}{2}=\frac{x}{2}+|x|$.

40(А). На боковой стороне BC равнобедренного ΔABC взяты точки M и N (M лежит между B и N) так, что $AN = MN$ и $\angle BAM = \angle NAC$. Доказать, что $\angle MAC = 60°$.

41. Разложить многочлен $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ на множители.

42. Если между цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше исходного. Найти это число.

43(А). Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $ab(a-b)=1001$?

44(А). Доказать, что сумма квадратов семи последовательных целых чисел делится на 7.

45. Пять дробей с числителями 1 и различными натуральными знаменателями дают в сумме 1. Найти эти дроби.

46. Найти наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 7 и сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 7.

47(А). Существует ли треугольник, у которого две стороны длиной 15 м и 8 м, а периметр — 30 м?

Раздел II

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

7 класс

1. *Решение.* Выразим переменную x через y:

$$x = \frac{2009y + 2011}{2010}. \ (1)$$

Выделим целую часть в правой части (1):

$$x = \frac{2010y + 2010 + (1 - y)}{2010} = y + 1 + \frac{1 - y}{2010}.$$

Так как $x \in N$, то $\frac{1-y}{2010}$ — натуральное число. Очевидно, что при $y = 0$ получим наименьшую пару чисел (2; 1), удовлетворяющую условию задачи.

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

2. *Ответ:* 157.

3. *Решение.* Всего был сыгран $7 \cdot 6 : 2 = 21$ матч.

Если бы они все закончились победой одной из команд, то сумма очков, набранных всеми командами, была бы равна $21 \cdot 3 = 63$. Но из условия задачи следует, что общая сумма набранных очков равна 58. Поскольку при каждой ничьей всего командам присуждается по одному очку, то из трех очков при ничьей теряется одно. Но всего потерянных очков в турнире будет $63 - 58 = 5$. Значит, 5 матчей закончились вничью.

Ответ: 5.

4. *Решение.* Имеем $\overline{xx00}+\overline{yy}=z^2$, или

$$1100x + 11y = z^2,\ 11(100x + y) = z^2,$$

значит, $z = 11m$, где $m \in N$, тогда $100x + y = 11m^2$, или $x + y = 11(m^2 - 9x)$.

Поскольку $x + y$ делится на 11 и $x \le 9$, $y \le 9$, то $x + y = 11$, тогда $m^2 = 9x + 11$, где $1 \le x \le 9$. Следовательно, $x = 7$, $m = 8$, $y = 4$, $z = 88$.

Ответ: (7; 4; 88).

5. *Решение.* В таком числе меньше трех цифр, поскольку $\overline{abc} - (a + b + c) = abc$, или $a(99 - bc) + 9b > 0$. Для двузначного числа имеем: $10a + b - (a + b) = ab$, откуда $b = 9$, $a = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Всего 9 чисел: 19, 29, 39, ..., 99.

Ответ: 9 чисел.

6. *Ответ:* $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

7. *Указание.* Ввести замену $a = 2010$.

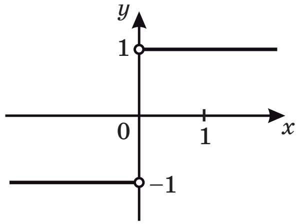
8. *Решение.* Так как $(x + y)^2 = (x + 3 + y - 3)^2 = (x + 3)^2 + 2(x + 3)(y - 3) + (y - 3)^2$, то данное уравнение примет вид $(x + 3)^2 - (x + 3)(x - 3) + (y - 3)^2 = 0$. Полученное равенство возможно лишь при $x + 3 = y - 3 = 0$, т. е. при $x = -3$, $y = 3$.

Ответ: $x = -3$; $y = 3$.

9. *Решение.* Нельзя. Первоначально включено четное число переключателей (в точности 0), за одну операцию количество включенных переключателей изменяется на четное число.

Следовательно, за любое число операций можно изменить количество включенных переключателей лишь на четное число, а 2011 — нечетное.

10. *Ответ:*



11. *Решение.* Наименьшее число, делящееся на 2, 3, 4, 5, 6, есть 60, значит, искомое число имеет вид $60m + 1$ и одновременно кратно 7. Искомое число 301.

Ответ: 301.

12. *Ответ:* $87130 + 8213 = 95\,343$.

13. *Ответ:* 45°.

14. *Ответ:* $x = 4 + 15k$, $y = 3 + 13k$, где $k \in Z$.

15. *Решение.* Определим последнюю цифру 7^{19}, для чего возведем 7 последовательно в степень и будем находить только последнюю цифру степени:

$7^1 = 7$, $7^2 = \ldots 9$, $7^3 = \ldots 3$, $7^4 = \ldots 1$, $7^5 = \ldots 7$, $7^6 = \ldots 9$ и т. д. И вообще, $7^{4x+3} = \ldots 3$.

Цифру после многоточия будем считать последнюю цифру степени.

Итак, 7^{19} оканчивается цифрой 3. Аналогично находим, что $(7^{19})^{19}$ оканчивается цифрой 7, $((7^{19})^{19})^{19}$ — цифрой 3. Таким образом, нечетное число возведений в степень оканчивается цифрой 3, а четное — цифрой 7, а так как 2011 — нечетное число, то искомое число оканчивается цифрой 3.

Ответ: 3.

16. *Решение.* Поскольку $2x + 1$ нечетно, то y — нечетно, т. е. $y = 2a + 1$, где $a \in N$.

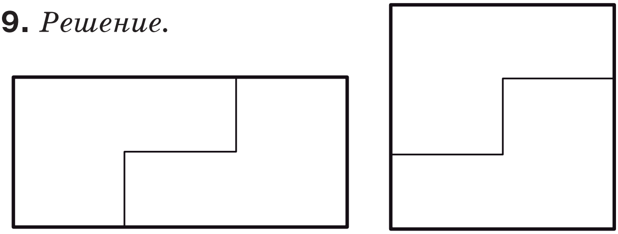
Имеем $2x+1=(2a+1)^3$, откуда $x=a(4a^2+6a+3)$. Так как x — простое, то $a=1$, тогда $x=13$, $y=3$.

17. *Ответ:* 48 км/ч.

Указание. $v_{\text{ср.}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}=\dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

18. *Ответ:* $\sqrt{52}$.

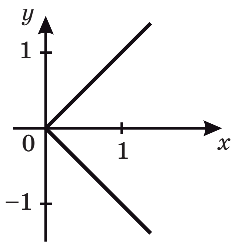
19. *Решение.*



20. *Ответ:* $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$.

21. *Ответ:* $(x^2+2x)^2+(x^2-2x)^2+(x^2-4)^2$.

22. *Указание.* $x\ge 0$, тогда $x=|y|$.



23. *Ответ:* 30°.

24. *Решение.* 100 мышей за 100 дней — 200 кг крупы;

100 мышей за 10 дней — 20 кг крупы;

10 мышей за 10 дней — 2 кг крупы.

Ответ: 2 кг.

25. *Ответ:* $90°$.

26. *Решение.* Так как $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1) = (a-1)a\left(a + \frac{1}{a} + 1\right) = 0$, где $a + \frac{1}{a} = -1$ (по условию), то $a^3 - 1 = 0$, т. е. $a^3 = 1$. Значит, $a^{2010} = (a^3)^{670} = 1$; $\frac{1}{a^{2010}} = 1$, тогда $a^{2010} + \frac{1}{a^{2010}} = 2$.

Ответ: 2.

27. *Решение.* Заметим, что $n^3 + 17n = (n^3 - n) + 18n = (n-1)n(n+1) + 18n$.

$(n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, которое делится на 6, из которых хотя бы одно четно, а значит, делится на 2, и есть одно, которое делится на 3. Следовательно, $n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном n.

28. *Указание.* Дополнением данного угла до $90°$ служит угол $36°$. Это дополнение следует разделить на 2 равных угла, каждый из которых составляет $\frac{1}{3}$ данного угла.

29. *Ответ:* 12,1 и 1,1.

30. *Решение.*

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x^2\right) + \frac{3}{4}y^2 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0.$$

31. *Ответ:* 4 дм.

32. *Ответ:* 3,2 и 0,8.

33. *Ответ:* на 96%.

Раздел III

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Часть 1

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -b/a$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2) Если $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, если a и c имеют разные знаки; если a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = -b/a$;

в) $ax^2 = 0,\ x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0,\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

3) Квадратное уравнение вида

$$ax^2 + 2kx + c = 0,\quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}\ .$$

3. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного вида:

$$x_1 + x_2 = -p;\quad x_1x_2 = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если $p,\ q,\ x_1,\ x_2$ таковы, что $x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

4. Разложение квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

5. Биквадратное уравнение

Общий вид: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному вида

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,\,2,\,3,\,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

6. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду $a\left(x^2 + \dfrac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \dfrac{m}{x}\right) + c = 0$

и заменой $y = x + \dfrac{m}{x}$ и $y^2 - 2m = x^2 + \dfrac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи:

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $(m = 1)$ — *симметрическое уравнение I рода.*

Решается подстановкой $y = x + \dfrac{1}{x}$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $(m = -1)$ — *симметрическое уравнение II рода.*

Решается подстановкой $y = x - \dfrac{1}{x}$.

7. Свойства степеней

Для любых действительных x, y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $\quad a^x : a^y = a^{x+y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$; $\quad (ab)^x = a^x b^x$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

8. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) =$
$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) =$
$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab;$$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$
$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;

$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) =$
$= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

9. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

$(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(a \geq 0)$;

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, если $0 \leq a < b$;

$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases}$

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ $(a \geq 0)$.

10. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Приложение

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Z_0 — множество целых неотрицательных чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел (числовая прямая);

C — множество комплексных чисел;

$[a; b]$, или $a \le x \le b$ — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом a и концом b;

$(a; b)$, или $a < x < b$ — открытый промежуток (или интервал);

$(a; b]$, или $a < x \le b$; $[a; b)$, или $a \le x < b$ — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);

$[a; +\infty)$, или $x \ge a$, $(-\infty; b]$, или $x \le b$ — лучи;

$(a; +\infty)$, или $x > a$, $(-\infty; b)$, или $x < b$ — открытые лучи;

$(-\infty; +\infty) = R$ — числовая прямая;

$a = b$ — a равно b;

$a \ne b$ — a не равно b;

$a \approx b$ — a приближенно равно b;

$a > b$ — a больше b;

$a \ge b$ — a больше или равно b;

$a < b$ — a меньше b;

$a \le b$ — a меньше или равно b;

$a \in A$ — a принадлежит множеству A;

$a \notin A$ — a не принадлежит множеству A;

$B \subset A$ — B является подмножеством A;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$\varnothing$ — пустое множество;

% — процент;

‰ — промилле;

НОД $(a; b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b;

НОК $(a; b)$ — наименьшее общее кратное чисел a и b;

$|a|$ — модуль (абсолютная величина) действительного числа a;

a^n — n-я степень числа a;

$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a;

$\sqrt{a}$ — арифметический квадратный корень из числа a;

$\pi \approx 3{,}1415$ — отношение длины окружности к диаметру;

$e \approx 2{,}71828$ — основание натурального логарифма;

$\log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ — логарифм числа x по основанию a;

$\lg x$ — десятичный логарифм числа x;

$\ln x$ — натуральный логарифм числа x;

$\sin x$ — синус x;

$\cos x$ — косинус x;

$\operatorname{tg} x$ — тангенс x;

$\operatorname{ctg} x$ — котангенс x;

$1/\sin x$ — косеканс x;

$1/\cos x$ — секанс x;

$\arcsin x$ — арксинус x;

$\arccos x$ — арккосинус x;

$\operatorname{arctg} x$ — арктангенс x;

$\operatorname{arcctg} x$ — арккотангенс x;

Δx — приращение аргумента;

Δy — приращение функции;

y', $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$ в точке x;

$y_{\text{наиб}}$, $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$;

$y_{\text{наим}}$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$;

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — интеграл функции $f(x)$ от a до b;

A — точка A;

a, AB — прямая a, прямая AB;

α, ABC — плоскость α, плоскость ABC;

ΔABC — треугольник ABC;

$\angle$ — знак угла, например, $\angle ab$, $\angle ABC$;

$\|$ — знак параллельности, например, $a \| b$, $\alpha \| \beta$;

$\perp$ — знак перпендикулярности, например, $a \perp b$, $\alpha \perp \beta$;

$\cup$ — знак дуги, например, $\cup AB$;

~ — знак подобия, например, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;

$M(x)$ — точка M на координатной прямой имеет координату x;

$M(x; y)$ — точка M в прямоугольной (декартовой) системе координат имеет абсциссу x и ординату y;

$M(x; y; z)$ — точка в пространстве имеет абсциссу x, ординату y, аппликату z.

Литература

Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике. — 3-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2008.

Балаян Э.Н. 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5 –11 классы. — 2-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2010.

Балаян Э.Н. Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

Базылев Д.Ф. Диофантовы уравнения. Справочное пособие к решению задач. — Минск: Апи, 1999.

Дьюдени Г.Э. 520 головоломок. — М.: Мир, 1975.

Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

Тригг Ч. Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975.

Содержание

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

ЛУЧШИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

7–11 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*
Компьютерная верстка *В. Микизиль*
Обложка *А. Вартанов*
Корректоры *В. Югобашян, Н. Никанорова*

Сдано в набор 10.11.2010. Подписано в печать 13.01.2011.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,8. Тираж 2500 экз.
Заказ №

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Содержание

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

ЛУЧШИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

7–11 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*
Компьютерная верстка *В. Микизиль*
Обложка *А. Вартанов*
Корректоры *В. Югобашян, Н. Никанорова*

Сдано в набор 10.11.2010. Подписано в печать 13.01.2011.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,8. Тираж 2500 экз.
Заказ №

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.