Серия «Секреты преподавания математики»

М. А. Екимова, Г. П. Кукин

ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ

МЦНМО
Москва, 2002

УДК 514.11
ББК 22.151.0
Е45

Екимова М. А., Кукин Г. П.

Е45 Задачи на разрезание.—М.: МЦНМО, 2002.— 120 с.: ил. Серия: «Секреты преподавания математики».

Эта книга является первой книгой серии «Секреты преподавания математики», призванной изложить и обобщить накопленный опыт в области математического образования.

Данный сборник представляет собой одну из частей курса «Развивающая логика в 5–7 классах». Ко всем задачам, приведенным в книге, даны решения или указания.

Книга рекомендуется для внеклассной работы по математике.

ББК 22.151.0

ISBN 5-94057-051-8

Введение

В настоящее время традиционный взгляд на состав предметов, изучаемых школьниками, пересматривается и уточняется. В школьную программу вводятся различные новые предметы. Одним из таких предметов является логика.

Изучение логики способствует пониманию красоты и изящества рассуждений, умению рассуждать, творческому развитию личности, эстетическому воспитанию человека. Каждый культурный человек должен быть знаком с логическими задачами, головоломками, играми, известными уже несколько столетий или даже тысячелетий во многих странах мира. Развитие сообразительности, смекалки и самостоятельности мышления необходимо любому человеку, если он желает преуспевать и достигнуть гармонии жизни.

Наш опыт показывает, что систематическое изучение формальной логики или фрагментов математической логики следует отложить на старшие классы средней школы. Вместе с тем, развивать логическое мышление необходимо как можно раньше. Фактически, при изучении учебных предметов в школе рассуждения и доказательства появляются лишь в 7 классе (когда начинается систематический курс геометрии). Для многих учеников резкий переход (не было рассуждений — стало много рассуждений) непосильно тяжел. В курсе развивающей логики для 5–7 классов вполне можно научить школьников рассуждать, доказывать, находить закономерности. Например, при решении математических ребусов надо не только угадать (подобрать) несколько ответов, но и доказать, что получен полный список возможных ответов. Это вполне посильно пятикласснику.

Но в процессе преподавания логики в 5–7 классах средних школ учителя сталкиваются с определенными трудностями: отсутствие учебников, дидактических материалов, пособий, наглядных материалов. Все это приходится составлять, писать и рисовать самому учителю.

Одна из целей этого сборника — облегчить учителю подготовку и проведение занятий.

Дадим некоторые рекомендации по проведению уроков перед работой со сборником.

- Начинать обучать школьников логике желательно с пятого класса, а может быть, и раньше.
- Преподавание логики должно вестись непринужденно, почти в импровизационном стиле. Эта видимая легкость на самом деле требует от учителя большой и серьезной подготовки. Неприемлемо, например, вычитывать интересную и занимательную задачу из толстой рукописной тетради, как иногда делают учителя.
- Рекомендуем проводить занятия в нестандартной форме.
- Необходимо использовать на уроках как можно больше наглядного материала: различных карточек, картинок, наборов фигур, иллюстраций к решению задач, схем.
- Не стоит заниматься с младшими школьниками одной темой в течение длительного времени.
- При разборе темы нужно стараться выделять основные логические вехи и добиваться понимания (а не зазубривания) этих моментов.
- Необходимо постоянно возвращаться к пройденному материалу. Это можно делать на самостоятельных работах, командных соревнованиях (во время уроков), зачетах в конце четверти, устных и письменных олимпиадах, матбоях (во внеурочное время).
- Необходимо также использовать на занятиях развлекательные и шуточные задания, иногда полезно сменить направление деятельности.

Данный сборник представляет собой одну из частей курса «Развивающая логика в 5–7 классах» — «Задачи на разрезание». Эта часть апробировалась на уроках логики в 5–7 классах школы-лицея №74 г. Омска.

Задачами на разрезание увлекались многие ученые с древнейших времен. Решения многих простых задач на разрезание были найдены еще древними греками, китайцами, но первый систематический трактат на эту тему принадлежит перу Абул-Вефа, знаменитого персидского астронома X века, жившего в Багдаде. Геометры всерьез занялись решением задач на разрезание фигур на наименьшее число частей и последующее составление из них той или иной новой фигуры лишь в начале XX века. Одним из основоположников этого увлекательного раздела геометрии был знаменитый составитель головоломок Генри

Э. Дьюдени. Особенно большое число существовавших ранее рекордов по разрезанию фигур побил эксперт австралийского патентного бюро Гарри Линдгрен. Он является ведущим специалистом в области разрезания фигур.

В наши дни любители головоломок увлекаются решением задач на разрезание прежде всего потому, что универсального метода решения таких задач не существует, и каждый, кто берется за их решение, может в полной мере проявить свою смекалку, интуицию и способность к творческому мышлению. Поскольку здесь не требуется глубокое знание геометрии, то любители иногда могут даже превзойти профессионалов-математиков.

Вместе с тем, задачи на разрезание не являются несерьезными или бесполезными, они не так уж и далеки от серьезных математических задач. Из задач на разрезание родилась теорема Бойаи–Гервина о том, что любые два равновеликих многоугольника равносоставлены (обратное очевидно), а затем и третья проблема Гильберта: верно ли аналогичное утверждение для многогранников?

Задачи на разрезание помогают как можно раньше формировать геометрические представления у школьников на разнообразном материале. При решении таких задач возникает ощущение красоты, закона и порядка в природе.

Сборник «Задачи на разрезание» разбит на два раздела. При решении задач из первого раздела ученикам не понадобится знание основ планиметрии, а будет нужна именно смекалка, геометрическое воображение и достаточно простые геометрические сведения, которые известны всем. Второй раздел — это факультативные задачи. Сюда вошли задачи, для решения которых понадобится знание основных геометрических сведений о фигурах, их свойствах и признаках, знание некоторых теорем. Каждый раздел разбит на параграфы, в которые мы постарались объединить задачи на одну тему, а они, в свою очередь, разбиты на уроки, содержащие каждый однородные задачи в порядке возрастания их трудности.

В первый раздел входит восемь параграфов.

1. Задачи на клетчатой бумаге. В этом параграфе собраны задачи, в которых разрезание фигур (в основном это квадраты и прямоугольники) идет по сторонам клеток. Параграф содержит 4 урока, рекомендуем их для изучения учащимися 5-х классов.

2. Пентамино. В этом параграфе собраны задачи, связанные с фигурами пентамино, поэтому для проведения этих уроков желательно раздать детям наборы этих фигур. Здесь два урока, рекомендуем их для изучения учащимися 5–6-х классов.

3. Трудные задачи на разрезание. Здесь собраны задачи на разрезание фигур более сложной формы, например, с границами, являющимися дугами, и более сложные задачи на разрезание. В этом параграфе два урока, их мы рекомендуем проводить в 7-х классах.

4. Разбиение плоскости. Здесь собраны задачи, в которых нужно находить сплошные разбиения прямоугольников на плитки прямоугольной формы, задачи на составление паркетов, задачи о наиболее плотной укладке фигур в прямоугольнике или квадрате. Рекомендуем этот параграф изучать в 6–7-х классах.

5. Танграм. Здесь собраны задачи, связанные с древней китайской головоломкой «Танграм». Для проведения этого урока желательно иметь эту головоломку, хотя бы сделанную из картона. Этот параграф рекомендуем для изучения в 5-х классах.

6. Задачи на разрезание в пространстве. Здесь учащихся знакомят с развертками куба, треугольной пирамиды, проводятся параллели и показываются различия между фигурами на плоскости и объемными телами, а значит различия в решении задач. Параграф содержит один урок, который рекомендуем для изучения учащимися 6-х классов.

7. Задачи на раскраску. Здесь показано, как раскраска фигуры помогает решать задачу. Доказать, что решение задачи на разрезание какой-нибудь фигуры на части возможно, нетрудно, достаточно предоставить какой-нибудь способ разрезания. А вот доказать, что разрезание невозможно, труднее. Сделать это нам помогает раскраска фигуры. В параграфе три урока. Их рекомендуем для изучения учащимися 7-х классов.

8. Задачи с раскраской в условии. Здесь собраны задачи, в которых требуется раскрасить фигуру определенным образом, ответить на вопрос: сколько цветов понадобится для такой раскраски (наименьшее или наибольшее количество) и т. д. В параграфе семь уроков. Их мы рекомендуем для изучения учащимися 7-х классов.

Во второй раздел входят задачи, которые можно решать на дополнительных занятиях. Он содержит три параграфа.

9. Превращение фигур. В нем собраны задачи, в которых одна фигура разрезается на части, из которых составляется другая фигура. В этом параграфе три урока, на первом рассматривается «превращение» различных фигур (здесь собраны достаточно легкие задачи), а на втором уроке рассматривается геометрия превращения квадрата.

10. Разные задачи на разрезание. Сюда входят различные задачи на разрезание, которые решаются различными методами. В этом параграфе три урока.

11. Площадь фигур. В этом параграфе два урока. На первом уроке рассматриваются задачи, при решении которых нужно разрезать фигуры на части, а потом доказывать, что фигуры равносоставлены, на втором уроке — задачи, при решении которых нужно использовать свойства площадей фигур.

Раздел 1

§1. Задачи на клетчатой бумаге

Урок 1.1

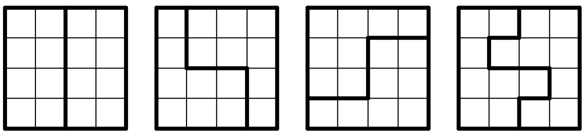
Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Развивать комбинаторные навыки (рассмотреть различные способы построения линии разреза фигур, правила, позволяющие при построении этой линии не терять решения), развивать представления о симметрии.

Задачи 1.1–1.4 решаем на уроке, задача 1.5 — на дом.

1.1. Квадрат содержит 16 клеток. Разделите квадрат на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. (Способы разрезания квадрата на две части будем считать различными, если части квадрата, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе.) Сколько всего решений имеет задача?

Указание. Найти несколько решений этой задачи не так уж сложно. На рис. 1 некоторые из них показаны, причем решения б) и в) одинаковы, так как полученные в них фигуры можно совместить наложением (если повернуть квадрат в) на 90 градусов).



Б) В) Ч) З)

Рис. 1

Но найти все решения и ни одно решение не потерять уже труднее. Заметим, что ломаная, делящая квадрат на две равные части, симметрична относительно центра квадрата, Это наблюдение позволяет шаг за шагом рисовать ломаную с двух концов. Например, если начало ломаной в точке A, то конец ее будет в точке B (рис. 2). Убедитесь, что для данной задачи начало и конец ломаной можно нарисовать двумя способами, показанными на рис. 2.

При построении ломаной, чтобы не потерять какое-либо решение, можно придерживаться такого правила. Если следующее звено ломаной можно нарисовать двумя способами, то сначала нужно заготовить второй такой же рисунок и выполнить этот шаг на одном рисунке первым, а на другом вторым способом (на рис. 3 показаны два продолжения рис. 2 (а)). Аналогично нужно поступать, когда способов не два, а три (на рис. 4 показаны три продолжения рис. 2 (б)). Указанный порядок действий помогает найти все решения.

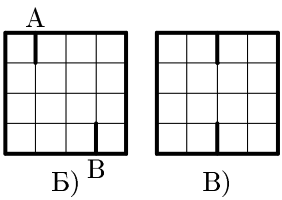


Рис. 2

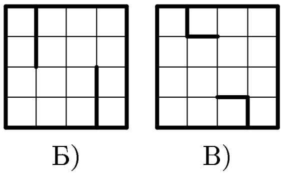


Рис. 3

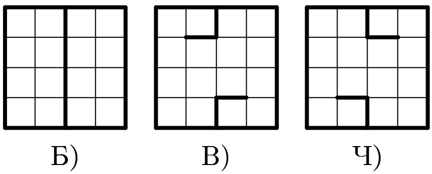


Рис. 4

1.2. Прямоугольник 3×4 содержит 12 клеток. Найдите пять способов разрезания прямоугольника на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток (способы разрезания считаются различными, если части, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе).

1.3. Прямоугольник 3×5 содержит 15 клеточек и центральная клетка удалена. Найдите пять способов разрезания оставшейся фигуры на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток.

1.4. Квадрат 6×6 разграфлен на 36 одинаковых квадратов. Найдите пять способов разрезания квадрата на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1.5. Задача 1.4 имеет более 200 решений. Найдите хотя бы 15 из них.

Урок 1.2

Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Продолжать развивать представления о симметрии, подготовка к теме «Пентамино» (рассмотрение различных фигурок, которые можно построить из пяти клеточек).

Задачи 1.6–1.11.

1.6. Можно ли квадрат 5×5 клеток разрезать на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток? Ответ обоснуйте.

1.7. Разделите квадрат 4×4 на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Сколько различных способов разрезания вы найдете?

1.8. Разделите фигуру (рис. 5) на три равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

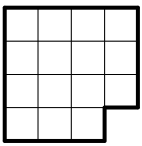


Рис. 5

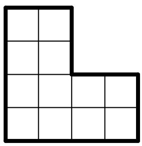


Рис. 6

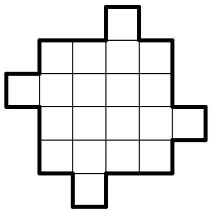


Рис. 7

1.9. Разделите фигуру (рис. 6) на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1.10. Разделите фигуру (рис. 7) на четыре равные части так, чтобы линии разрезов шли по сторонам квадратов. Найдите как можно больше решений.

1.11. Разделите квадрат 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части.

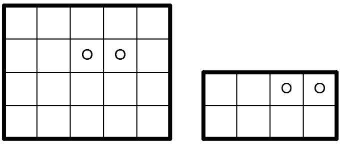
Урок 1.3

Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Продолжать развивать представления о симметрии (осевой, центральной).

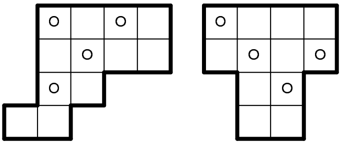
Задачи 1.12–1.16.

1.12. Разрежьте фигуры, изображенные на рис. 8, на две равные части по линиям сетки, причем в каждой из частей должен быть кружок.



Б) В)

Рис. 8



Б) В)

Рис. 9

1.13. Фигуры, изображенные на рис. 9, надо разрезать по линиям сетки на четыре равные части так, чтобы в каждой части был кружок. Как это сделать?

1.14. Разрежьте фигуру, изображенную на рис. 10, по линиям сетки на четыре равные части и сложите из них квадрат так, чтобы кружочки и звездочки расположились симметрично относительно всех осей симметрии квадрата.

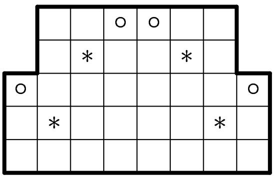


Рис. 10

1.15. Разрежьте данный квадрат (рис. 11) по сторонам клеток так, чтобы все части были одинакового размера и формы и чтобы каждая содержала по одному кружку и звездочке.

1.16. Разрежьте квадрат 6×6 из клетчатой бумаги, изображенный на рис. 12, на четыре одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала три закрашенные клетки.

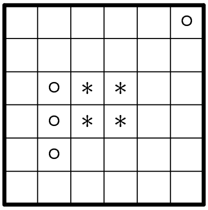


Рис. 11

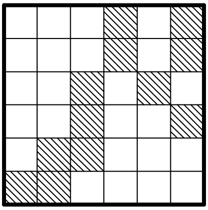


Рис. 12

Урок 1.4

Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Научиться разрезать прямоугольник на две равные части, из которых можно сложить квадрат, другой прямоугольник. Научиться определять, из каких прямоугольников, разрезав их, можно составить квадрат.

Задачи 1.17–1.22. Дополнительно задачи 1.23, 1.24 (эти задачи можно рассмотреть в начале урока для разминки).

1.17. Прямоугольник 4×9 клеток разрежьте по сторонам клеток на две равные части так, чтобы из них затем можно было сложить квадрат.

1.18. Можно ли прямоугольник 4×8 клеток разрезать на две части по сторонам клеток так, чтобы из них можно было составить квадрат?

1.19. Из прямоугольника 10×7 клеток вырезали прямоугольник 1×6 клеток, как показано на рис. 13. Разрежьте полученную фигуру на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

1.20. Из прямоугольника 8×9 клеток вырезали закрашенные фигуры, как показано на рис. 14. Разрежьте полученную фигуру на две равные части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник 6×10.

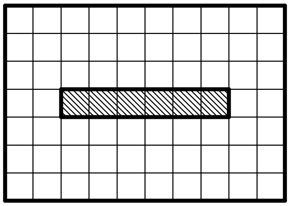


Рис. 13

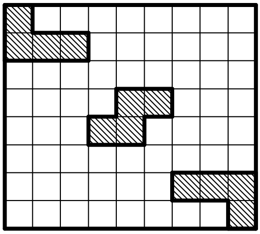


Рис. 14

1.21. На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 5×5 клеток. Покажите, как разрезать его по сторонам клеток на 7 различных прямоугольников.

1.22. Разрежьте квадрат 13×13 на 5 прямоугольников по сторонам клеток так, чтобы все десять чисел, выражающих длины сторон прямоугольников, были различными целыми числами.

1.23. Разделите фигуры, изображенные на рис. 15, на две равные части. (Разрезать можно не только по линиям клеток, но и по их диагоналям.)

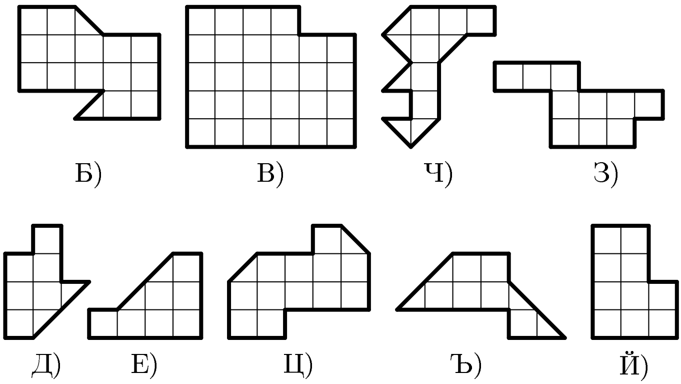


Рис. 15

1.24. Разрежьте фигуры, изображенные на рис. 16, на четыре равные части.

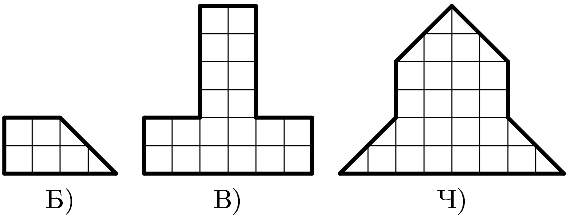


Рис. 16

§2. Пентамино

Урок 2.1

Тема: Пентамино.
Цель: Развитие комбинаторных навыков учащихся.
Задачи 2.1–2.5.

Фигуры домино, тримино, тетрамино (игру с такими фигурками называют тетрис), пентамино составляют из двух, трех, четырех, пяти квадратов так, чтобы любой квадрат имел общую сторону хотя бы с одним квадратом.

Из двух одинаковых квадратов можно составить только одну фигуру — домино (см. рис. 17). Фигуры тримино можно получить из единственной фигуры домино, приставляя к ней различными способами еще один квадрат. Получится две фигуры тримино (рис. 18).

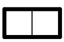


Рис. 17

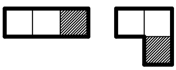


Рис. 18

2.1. Составьте всевозможные фигуры тетрамино (от греч. слова «тетра» — четыре). Сколько их получилось? (Фигуры, полученные поворотом или симметричным отображением из каких-либо других, не считаются новыми).

2.2. Составьте все возможные фигуры пентамино (от греч. «пента» — пять). Сколько их получилось?

2.3. Составьте фигуры, изображенные на рис. 19, из фигурок пентамино. Сколько решений имеет задача для каждой фигуры?

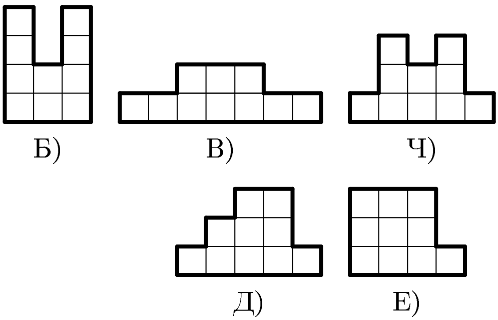


Рис. 19

2.4. Сложите прямоугольник 3×5 из фигурок пентамино. Сколько различных решений у вас получится?

2.5. Составьте фигуры, изображенные на рис. 20, из фигурок пентамино.

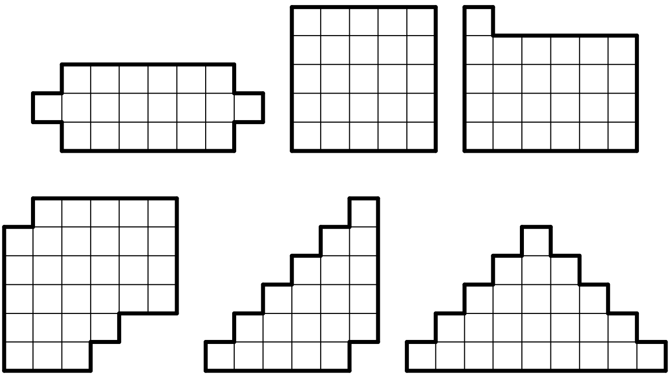


Рис. 20

Урок 2.2

Тема: Пентамино.
Цель: Развитие представлений о симметрии.
Задачи 2.6–2.12.

В задаче 2.2 мы составляли все возможные фигуры пентамино. Посмотрите их на рис. 21.

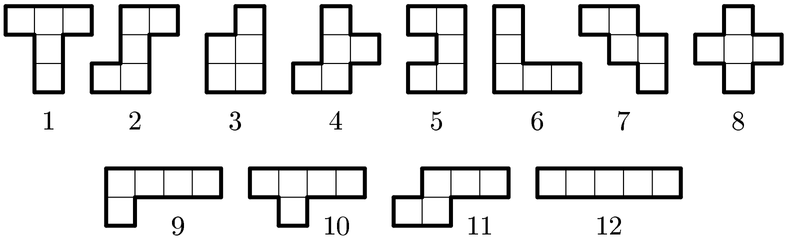


Рис. 21

Фигура 1 обладает следующим свойством. Если ее вырезать из бумаги и перегнуть по прямой a (рис. 22), то одна часть фигуры совпадет с другой. Говорят, что фигура симметрична относительно прямой a — оси симметрии. У фигуры 12 тоже есть ось симметрии, даже две — это прямые b и c, а у фигуры 2 осей симметрии нет.

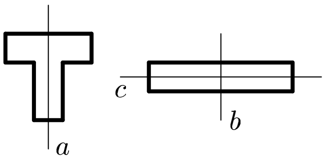


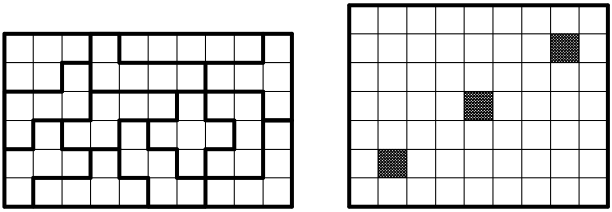
Рис. 22

2.6. Сколько осей симметрии имеет каждая фигура пентамино?

2.7. Из всех 12 фигур пентамино сложите прямоугольник 6×10. Несимметричные куски разрешается переворачивать.

2.8. Сложите из двенадцати фигур пентамино прямоугольник 6×10, причем так, чтобы каждый элемент касался какой-нибудь стороны этого прямоугольника.

2.9. Разрежьте прямоугольник, изображенный на рис. 23 (а), по внутренним линиям на две такие части, из которых можно сложить фигуру с тремя квадратными отверстиями размером в одну клетку (рис. 23 (б)).



Б) В)

Рис. 23

2.10. Из фигурок пентамино сложите квадрат 8×8 с вырезанным посредине квадратом 2×2. Найдите несколько решений.

2.11. Двенадцать пентамино уложены в прямоугольник 5×12. Восстановите границы фигур (рис. 24), если каждая звездочка попадает ровно в одно пентамино.

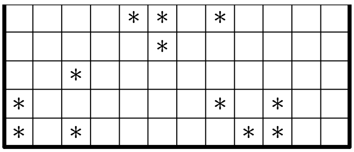


Рис. 24

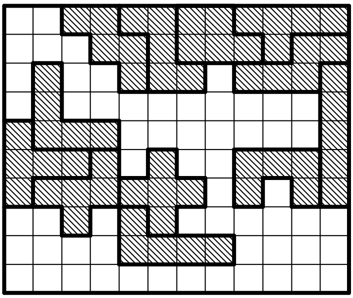


Рис. 25

2.12. Двенадцать фигур пентамино уложены в коробку 12×10, как показано на рис. 25. Попробуйте разместить еще один комплект пентамино на оставшемся свободном поле.

§3. Трудные задачи на разрезание

Урок 3.1

Тема: Задачи на разрезание фигур более сложной формы с границами, являющимися дугами.

Цель: Научиться разрезать фигуры более сложной формы с границами, являющимися дугами, и составлять из полученных частей квадрат.

Задачи 3.1–3.5.

3.1. На рис. 26 представлены 4 фигуры. Одним разрезом поделите каждую из них на две части и сделайте из них квадрат. Бумага в клеточку облегчит вам решение задачи.

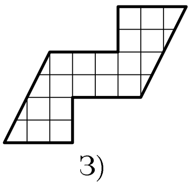


Рис. 26

3.2. Разрезав квадрат 6×6 на части, сложите из них фигуры, изображенные на рис. 27.

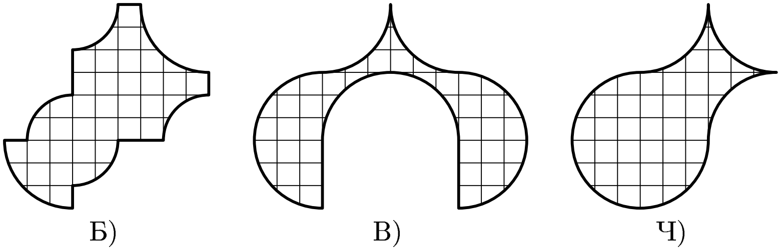


Рис. 27

3.3. На рис. 28 изображена часть крепостной стены. Один из камней имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной. Изобразите этот камень.

3.4. На что пойдет больше краски: на окрашивание квадрата или этого необычного кольца (рис. 29)?

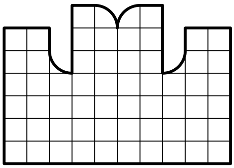


Рис. 28

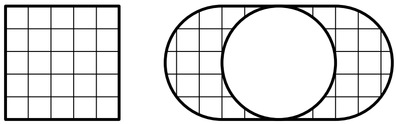


Рис. 29

3.5. Разрежьте вазу, изображенную на рис. 30, на три части, из которых можно сложить ромб.

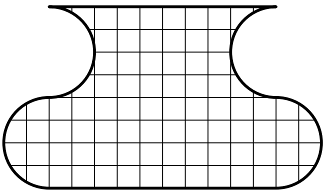


Рис. 30

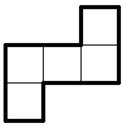


Рис. 31

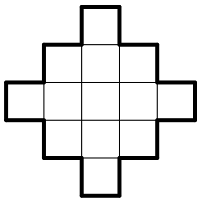


Рис. 32

Урок 3.2

Тема: Более сложные задачи на разрезание.

Цель: Попрактиковаться в решении более сложных задач на разрезание.

Задачи 3.6–3.11 решаем на уроке, задача 3.12 — на дом.

3.6. Разрежьте фигуру (рис. 31) двумя прямолинейными разрезами на такие части, из которых можно сложить квадрат.

3.7. Разрежьте изображенную на рис. 32 фигуру на четыре равные части, из которых можно было бы сложить квадрат.

3.8. Разрежьте букву Е, изображенную на рис. 33, на пять частей и сложите из них квадрат. Части переворачивать обратной стороной не разрешается. Нельзя ли обойтись четырьмя частями, если разрешить переворачивать части обратной стороной?

3.9. Крест, составленный из пяти квадратов, требуется разрезать на такие части, из которых можно было бы составить один равновеликий кресту (то есть равный по площади) квадрат.

3.10. Даны две шахматные доски: обыкновенная, в 64 клетки, и другая — в 36 клеток. Требуется каждую из них разрезать на две части так, чтобы из всех полученных четырех частей составить новую шахматную доску 10×10 клеток.

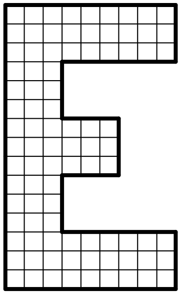


Рис. 33

3.11. У краснодеревщика имеется кусок шахматной доски 7×7 клеток из драгоценного красного дерева. Он хочет, не теряя материала и проводя разрезы только по краям клеток, распилить доску на 6 частей так, чтобы из них сделать три новых квадрата, все разных размеров. Как это сделать?

3.12. Можно ли решить задачу 3.11, если количество частей должно равняться 5, а общая длина разрезов — 17?

§4. Разбиение плоскости

Урок 4.1

Тема: Сплошные разбиения прямоугольников.

Цель: Научиться строить сплошные разбиения прямоугольников плитками прямоугольной формы. Ответить на вопрос, при каких условиях прямоугольник допускает такое разбиение плоскости.

Задачи 4.1–4.5 (а) решаем на уроке. Задачи 4.5 (б), 4.6, 4.7 можно оставить на дом.

Пусть у нас имеется неограниченный запас прямоугольных плиток размером 2×1, и мы хотим выложить ими пол прямоугольной формы, причем никакие две плитки не должны перекрываться.

4.1. Выложите плитками 2×1 пол в комнате размером 5×6.

Ясно, что если пол в прямоугольной комнате $p \times q$ выложен плитками 2×1, то $p \cdot q$ четно (так как площадь делится на 2). И обратно: если $p \cdot q$ четно, то пол можно выложить плитками 2×1.

Действительно, в этом случае одно из чисел p или q должно быть четно. Если, например, $p = 2r$, то пол можно выложить так, как показано на рис. 34. Но в таких паркетах есть линии разрыва, которые пересекают всю «комнату» от стены до стены, но не пересекают плитки. А на практике используются паркеты без таких линий — сплошные паркеты.

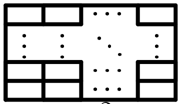


Рис. 34

4.2. Выложите плитками 2×1 сплошной паркет комнаты 5×6.

4.3. Попытайтесь найти сплошное разбиение на плитки 2×1 а) прямоугольника 4×6; б) квадрата 6×6.

4.4. Выложите плитками 2×1 сплошной паркет а) комнаты 5×8; б) комнаты 6×8.

Естественно возникает вопрос, при каких p и q прямоугольник $p \times q$ допускает сплошное разбиение на плитки 2×1?

Мы уже знаем *необходимые* условия: 1) $p \cdot q$ делится на 2, 2) $(p, q) \neq (6, 6)$ и $(p, q) \neq (4, 6)$.

Также можно проверить еще одно условие: 3) $p \geqslant 5$, $q \geqslant 5$.

Оказывается, эти три условия оказываются и достаточными.

Плитки других размеров.

4.5. Плитками 3×2 выложите без разрывов а) прямоугольник 11×18; б) прямоугольник 14×15.

4.6. Выложите без разрывов, если это возможно, квадрат 12×12 плитками 3×2.

4.7. Можно ли, взяв квадрат клетчатой бумаги размерами 5×5 клеток, вырезать из него 1 клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на пластинки 1×3 клетки?

Урок 4.2

Тема: Паркетажи.

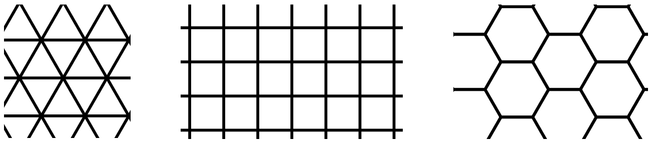
Цель: Научиться покрывать плоскость различными фигурами (причем паркетажи могут быть с линиями разрыва или сплошными), или доказывать, что это невозможно.

Задачи 4.8–4.12.

Один из наиболее важных вопросов теории разбиения плоскости: «Какой формы должна быть плитка, чтобы ее копиями можно было покрыть плоскость без пробелов и двойных покрытий?» На ум сразу же приходит довольно много очевидных форм.

Можно доказать, что существуют только три правильных многоугольника, которыми можно покрыть плоскость. Это равносторонний треугольник, квадрат и шестиугольник (см. рис. 35).

Существует бесконечное множество неправильных многоугольников, которыми можно покрыть плоскость.



Б) В) Ч)

Рис. 35

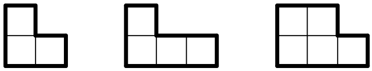
4.8. Разделите произвольный тупоугольный треугольник на четыре равных и подобных ему треугольника.

В задаче 4.8 мы разбили треугольник на четыре равных и подобных ему треугольника. Каждый из четырех получившихся треугольников можно в свою очередь разбить на четыре равных и подобных ему треугольника и т. д. Если двигаться в обратном направлении, то есть складывать четыре равных тупоугольных треугольника так, чтобы получился один подобный им треугольник, но в четыре раза большей площади, и т. д., то такими треугольниками можно замостить плоскость.

Плоскость можно покрыть и другими фигурами, например, трапециями, параллелограммами.

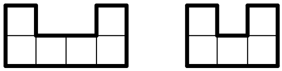
4.9. Покройте плоскость одинаковыми фигурами, изображенными на рис. 36.

4.10. Замостите плоскость одинаковыми «скобками», изображенными на рис. 37.



Б) В) Ч)

Рис. 36



Б) В)

Рис. 37

4.11. Имеются четыре квадратика со стороной 1, восемь — со стороной 2, двенадцать — со стороной 3. Можно ли из них сложить один большой квадрат?

4.12. Можно ли сложить квадрат какого-либо размера из деревянных плиток указанного на рис. 38 вида, используя плитки обоих видов?

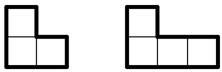


Рис. 38

Урок 4.3

Тема: Задачи о наиболее плотной укладке.

Цель: Сформировать понятие об оптимальном решении.

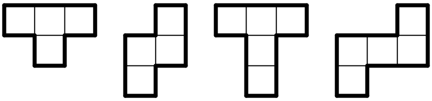
Задачи 4.13–4.16.

4.13. Какое наибольшее число полосок размерами 1×5 клеток можно выкроить из квадрата клетчатой бумаги 8×8 клеток?

4.14. У мастера есть лист жести размером 22×15 кв. дм. Мастер хочет вырезать из него как можно больше прямоугольных заготовок размером 3×5 кв. дм. Помогите ему.

4.15. Можно ли прямоугольник 35×23 клетки разрезать без остатка на прямоугольники размером 5×7? Если можно, то как? Если нет, то почему?

4.16. На листе клетчатой бумаги размерами 10×10 клеток наметьте разрезы, с помощью которых можно получить как можно больше целых фигур, изображенных на рис. 39. Фигуры, изображенные на рис. 39 (б, г), можно переворачивать.



Б) В) Ч) З)

Рис. 39

§5. Танграм

Урок 5.1

Тема: Танграм.

Цель: Познакомить учащихся с китайской головоломкой «Танграм». Попрактиковаться в геометрическом исследовании, конструировании. Развивать комбинаторные навыки.

Задачи 5.1–5.7.

Говоря о задачах на разрезание, нельзя не упомянуть о древней китайской головоломке «Танграм», возникшей в Китае 4 тыс. лет назад. В Китае ее называют «чи тао ту», то есть умственная головоломка из семи частей.

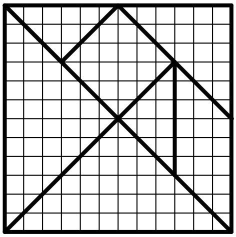


Рис. 40

Методические рекомендации. Для проведения этого урока желательно иметь раздаточный материал: головоломку (которую могут изготовить сами школьники), рисунки фигур, которые нужно будет сложить.

5.1. Изготовьте головоломку сами: переведите на плотную бумагу квадрат, разделенный на семь частей (рис. 40), и разрежьте его.

5.2. Используя все семь частей головоломки, составьте фигурки, изображенные на рис. 41.

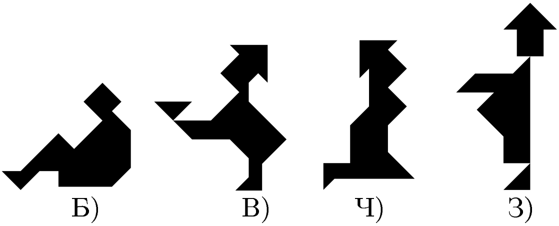


Рис. 41

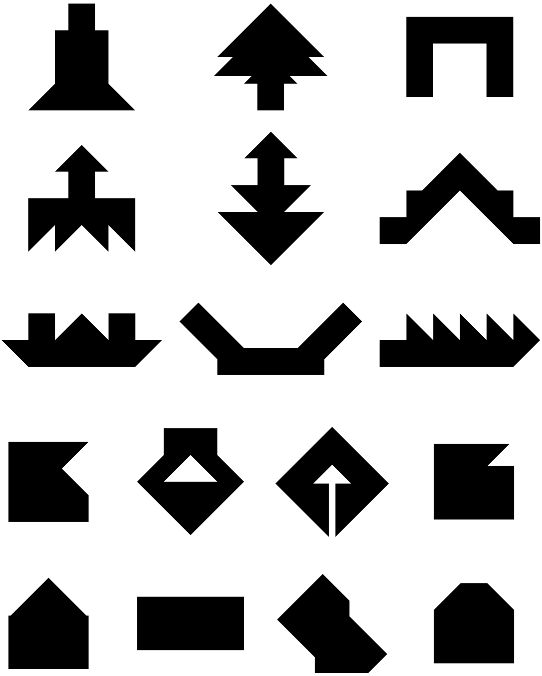


Рис. 42

Методические рекомендации. Детям можно раздать рисунки фигур а), б) в натуральную величину. И поэтому школьник может решать задачу, накладывая части головоломок на рисунок фигуры и тем самым подбирая нужные части, что упрощает задачу. А рисунки фигур в), г) можно дать в меньшем масштабе; следовательно, эти задачи решать будет труднее. На рис. 42 даны еще фигурки для самостоятельного составления.

5.3. Попробуйте придумать свою фигурку, используя все семь частей танграма.

5.4. В танграме среди его семи частей уже есть треугольники разных размеров. Но из его частей можно еще складывать различные треугольники. Сложите треугольник, используя четыре части танграма: а) один большой треугольник, два маленьких треугольника и квадрат; б) один большой треугольник, два маленьких треугольника и параллелограмм; в) один большой треугольник, один средний треугольник и два маленьких треугольника.

5.5. Можно ли составить треугольник, используя только две части танграма? Три части? Пять частей? Шесть частей? Все семь частей танграма?

5.6. Очевидно, что из всех семи частей танграма составляется квадрат. Можно или нельзя составить квадрат из двух частей? Из трех? Из четырех?

5.7. Из каких различных частей танграма можно составить прямоугольник? Какие еще выпуклые многоугольники можно составить?

§6. Задачи на разрезание в пространстве

Урок 6.1

Тема: Задачи на разрезание в пространстве.

Цель: Развивать пространственное воображение. Научиться строить развертки треугольной пирамиды, куба, определять, какие развертки неверные. Попрактиковаться в решении задач на разрезание тел в пространстве (решение таких задач отличается от решения задач на разрезание фигур на плоскости).

Задачи 6.1–6.7.

6.1. У Буратино была бумага, с одной стороны оклеенная полиэтиленом. Он сделал заготовку, изображенную на рис. 43, чтобы из нее клеить пакеты для молока (треугольные пирамиды). А лиса Алиса может сделать другую заготовку. Какую?

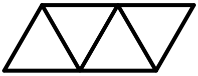


Рис. 43

6.2. Кот Базилио тоже достал такой бумаги, но он хочет клеить кубы (пакеты для кефира). Он сделал заготовки, изображенные на рис. 44. А лиса Алиса говорит, что некоторые можно сразу выбрасывать, потому что они не годятся. Права ли она?

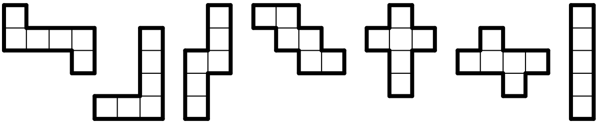


Рис. 44

6.3. Пирамида Хеопса имеет в основании квадрат, а ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Буратино лазил наверх и измерил угол грани при вершине ($\angle AMD$, на рис. 45). Получилось 100°. А лиса Алиса говорит, что он перегрелся на солнце, ведь такого не может быть. Права ли она?

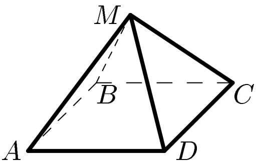


Рис. 45

6.4. Какое минимальное число плоских разрезов нужно сделать, чтобы разделить куб на 64 маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать части куба как угодно.

6.5. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, затем каждое его ребро разделили на 5 равных частей, после чего распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в 5 раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков? У скольких кубиков окрашены три грани? Две грани? Одна грань? Сколько осталось неокрашенных кубиков?

6.6. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось 5 корок. Может ли такое быть?

6.7. На какое наибольшее число частей можно разрезать блин тремя прямолинейными разрезами? Сколько частей может получиться при трех разрезах каравая хлеба?

§7. Задачи на раскраску

Урок 7.1

Тема: Раскраска помогает решать задачи.

Цель: Научиться доказывать, что некоторые задачи на разрезание не имеют решений, с помощью удачно выбранной раскраски (например, раскраска в шахматном порядке), тем самым — совершенствовать логическую культуру учащихся.

Задачи 7.1–7.5.

Нетрудно доказать, что решение задачи на разрезание какой-нибудь фигуры на части возможно: достаточно предоставить какой-нибудь способ разрезания. Найти все решения, то есть все способы разрезания, уже труднее. А доказать, что разрезание невозможно, тоже достаточно трудно. Сделать это в некоторых случаях нам помогает раскраска фигуры.

7.1. Взяли квадрат клетчатой бумаги размером 8×8, отрезали от него две клетки (левую нижнюю и правую верхнюю). Можно ли полученную фигуру полностью покрыть «доминошками» — прямоугольниками 1×2?

7.2. На шахматной доске стоит фигура «верблюд», которая каждым ходом сдвигается на три клетки по вертикали и одну по горизонтали, или на три по горизонтали и одну по вертикали. Может ли «верблюд», сделав несколько ходов, попасть в клетку, соседнюю исходной по стороне?

7.3. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук. По команде каждый жук переполз на одну из соседних по стороне клеток. Может ли после этого оказаться так, что в каждой клетке снова будет сидеть ровно один жук? А если бы исходный квадрат имел размеры 6×6?

7.4. Можно ли разрезать квадрат клетчатой бумаги размером 4×4 на один пьедестал, один квадрат, один столбик и один зигзаг (рис. 46)?

7.5. Можно ли квадрат клетчатой бумаги размером 10×10 разрезать на фигурки, изображенные на рис. 47?

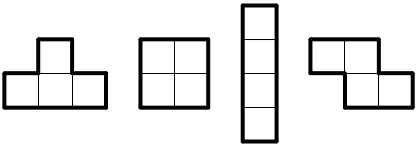


Рис. 46

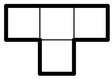


Рис. 47

Урок 7.2

Тема: Раскраска помогает решать задачи.

Цель: Научиться доказывать, что некоторые задачи на разрезание не имеют решений, с помощью удачно выбранной раскраски (раскраска столбиками и диагональная раскраска), тем самым — совершенствовать логическую культуру учащихся.

Задачи 7.6–7.10.

7.6. Можно ли квадрат клетчатой бумаги размером 10×10 разрезать на фигурки, изображенные на рис. 48?

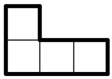


Рис. 48

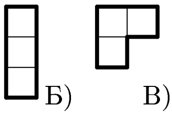


Рис. 49

7.7. Можно ли квадрат 8×8 клеток с вырезанной угловой клеткой разрезать на а) уголки и столбики (рис. 49 (а, б)); б) уголки (рис. 49 (б)); в) столбики (рис. 49 (а))?

7.8. Известно, что квадрат клетчатой бумаги размерами 8×8 покрыли несколькими плитками 2×2 и несколькими полосками 1×4. Можно ли покрыть квадрат 8×8, если одну плитку заменить полоской?

7.9. Набор «Юный паркетчик» состоит из 12 плиток, изображенных на рис. 49 (а), плотно уложенных в один слой в коробку размером 6×6 клеток. Хулиган Вася сломал одну плитку, и ее заменили плиткой, изображенной на рис. 49 (б). Удастся ли теперь все детали уложить в эту же коробку?

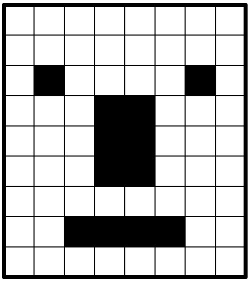


Рис. 50

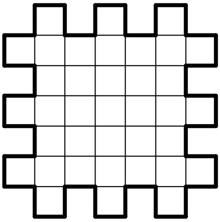


Рис. 51

7.10. Докажите, что изображенную на рис. 50 фигуру нельзя разрезать на прямоугольники, состоящие из трех клеток.

Урок 7.3

Тема: Раскраска помогает решать задачи.

Цель: Совершенствовать навыки решения задач на разрезание с помощью удачно выбранной раскраски.

Задачи 7.11–7.15.

7.11. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать фигуру, изображенную на рис. 51, если резать разрешается только по сторонам клеток?

7.12. Можно ли шестиугольный торт (рис. 52) разрезать на 23 равных куска по указанным линиям?

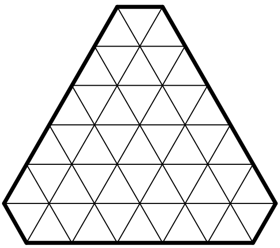


Рис. 52

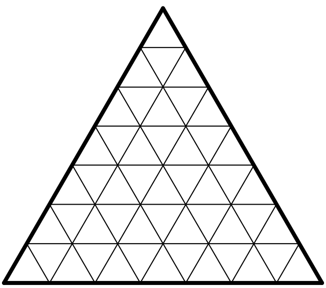


Рис. 53

7.13. За́мок имеет форму правильного треугольника, разбитого на 49 одинаковых залов, каждый из которых тоже имеет форму правильного треугольника (см. рис. 53). В стене между любыми двумя залами есть дверь. Путник хочет обойти как можно больше залов, не заходя ни в один дважды. Какое наибольшее количество залов ему удастся обойти?

7.14. Можно ли замостить шашечную доску 10×10 плитками размером 4×1?

7.15. а) Докажите, что если прямоугольник клетчатой бумаги размерами $m \times n$ разрезали на полоски 1×5, то хотя бы одно из чисел m, n делится на 5.

б) Известно, что прямоугольник клетчатой бумаги размерами $m \times n$ разрезали на полоски 1×6. Докажите, что хотя бы одно из чисел m, n делится на 6.

в) Известно, что прямоугольник клетчатой бумаги размерами $m \times n$ разрезали на полоски $1 \times k$. Докажите, что m или n делится на k.

§8. Задачи с раскраской в условии

Урок 8.1

Тема: Задачи с раскраской в условии.

Цель: Развить комбинаторные навыки. Формировать понятие об оптимальном решении.

Задачи 8.1–8.6 (1). Задачи 8.6 (2), 8.7 — на дом.

8.1. Раскрасьте клетки таблицы 3×3 в наибольшее число цветов (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону.

8.2. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 4×4 (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлась пара клеток одного цвета?

8.3. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 клеток так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.

8.4. Расставьте крестики и нолики в квадрате 5×5 клеток так, чтобы в каждой строке (кроме, быть может, первой) крестиков было бы больше, чем ноликов, и в каждом столбце (кроме, быть может, последнего) ноликов было бы больше, чем крестиков. Пустых клеток быть не должно$<$

8.5. Дан квадрат 5×5 клеток. Закрасьте некоторые клетки белой краской, а остальные черной так, чтобы в любом квадрате 3×3 клетки оказалось ровно 8 белых клеток.

8.6. 1) Дан квадрат клетчатой бумаги 4×4 клетки. Каждая клетка окрашена одним цветом. Никакие две клетки, стоящие в одном ряду (по горизонтали, по вертикали или по диагонали длины от 2 до 4) не могут быть одного цвета. Какое наименьшее число цветов необходимо для такой раскраски?

2) Решите аналогичную задачу для квадрата 5×5.

8.7. Взяли квадрат клетчатой бумаги 6×6 клеток. Придумайте раскраску клеток в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, между которыми ровно одна клетка (по горизонтали, вертикали или диагонали), были покрашены в разные цвета. Соседние клетки можно красить в один цвет.

Урок 8.2

Тема: Задачи с раскраской в условии.

Цель: Сформировать понятие об оптимальном решении. Выработать привычку внимательно читать условие и решать задачу в соответствии с ним.

Задачи 8.8–8.12.

8.8. Некоторые клетки квадрата 4×4 белые, а остальные — черные. Известно, что у каждой белой клетки ровно 3 черные соседки (по стороне), а у каждой черной клетки — ровно 1 белая соседка. Восстановите раскраску по этим условиям.

8.9. Буратино взял квадрат клетчатой бумаги 8×8 клеток, некоторые клетки закрасил черным, а остальные оставил белыми. Посмотрел и говорит: «У каждой черной клетки ровно две черные соседки (по стороне)». Лиса Алиса картинку не видела, но утверждает, что черных клеток не больше, чем 36. Права ли она?

8.10. Рома, Сема и Тома взяли по квадрату клетчатой бумаги 5×5 клеток. Каждый закрасил 16 клеток черным, а остальные оставил белыми. Оказалось, что у каждой черной клетки ровно две черные соседки (по стороне). Рома хотел пройти по всем черным клеткам, переходя из клетки в соседнюю, но этого было сделать нельзя. На чертеже у Семы это было сделать можно, но некоторые черные клетки не имели белых соседей. Наконец, у Томы был чертеж, где можно было пройти по всем черным клеткам, переходя от соседки к соседке, и у каждой черной клетки была белая соседка. Какие были чертежи?

8.11. Можно ли в фигуре, изображенной на рис. 54, закрасить некоторые клетки так, чтобы любая клетка граничила по стороне ровно с одной из окрашенных соседок?

8.12. В фигуре, изображенной на рис. 55, закрасьте некоторые клетки черным цветом, а остальные оставьте белыми так, чтобы у каждой белой клетки было ровно две черные соседки (по стороне), а у каждой черной клетки было ровно две белые соседки.

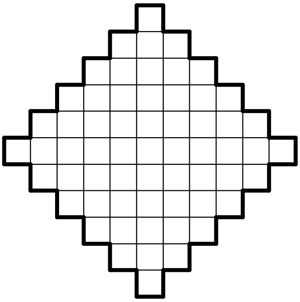


Рис. 54

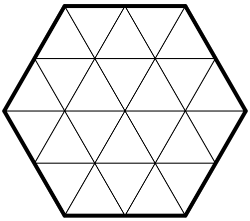


Рис. 55

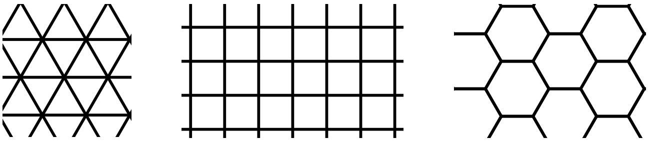
Урок 8.3

Тема: Задачи с раскраской в условии.

Цель: Формирование представлений о топологических свойствах плоскости. Учиться искать решение на основе логического анализа. Продолжать вырабатывать привычку внимательно читать условие и решать задачу в соответствии с ним.

Задачи 8.13–8.19.

8.13. На данном чертеже плоскость разбита прямыми линиями на многоугольные клетки: а) правильные треугольники; б) правильные четырехугольники; в) правильные шестиугольники (рис. 56). Соседними считаются клетки, у которых есть общая сторона. Каждую клетку красят одним цветом. Любые две соседние клетки окрашиваются в разные цвета. Какое наименьшее число цветов требуется для такой раскраски?



Б) В) Ч)

Рис. 56

8.14. Буратино взял шестиугольник, сложенный из 24 треугольников (рис. 55), и каждый треугольник закрасил одной краской. Посмотрел и говорит: «Всего три цвета, а у каждого треугольника все соседи (по стороне) разных цветов». Лиса Алиса картинку не видела, но утверждает, что такого не может быть. Права ли она?

8.15. Клетки квадрата 7×7 клеток раскрасьте в наименьшее число цветов (каждую одной краской) так, чтобы у каждой клетки все четыре соседки (по стороне) были разных цветов.

8.16. Плоскость разбита на треугольные клетки — равные равнобедренные прямоугольные треугольники, (рис. 57). Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону. Все точки внутри любой клетки окрашены одинаково, у каждой клетки все ее соседки разных цветов. Придумайте вариант такой раскраски в 4 цвета.

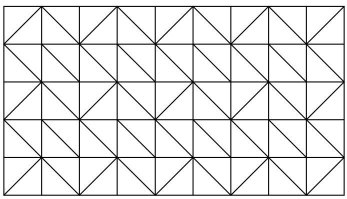


Рис. 57

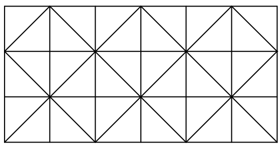


Рис. 58

8.17. Плоскость разбита прямыми линиями на равные клетки — прямоугольные равнобедренные треугольники (рис. 58). Две клетки назовем соседками, если у них есть общая сторона. Надо так покрасить каждую клетку одним цветом, чтобы у каждой клетки все ее соседки были разных цветов. Какое наименьшее число цветов потребуется?

8.18. Плоскость разбита прямыми линиями на клетки — равные треугольники с углами 30°, 60°, 90° (рис. 59). Две клетки называются соседками, если они имеют общую сторону. Каждую клетку окрашивают одним цветом. При этом у любой клетки все ее соседки должны быть разных цветов. Какое наименьшее число цветов потребуется?

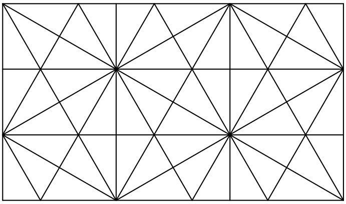


Рис. 59

8.19. Плоскость разбита на равные клетки — правильные шестиугольники. Каждый шестиугольник окрашен одним цветом. Оказалось, что у любой клетки каждая ее соседка покрашена не так, как остальные. Какое наименьшее число цветов отвечает этим условиям?

Урок 8.4

Тема: Задачи с раскраской в условии.

Цель: Формирование представлений о топологических свойствах плоскости. Научиться искать решение на основе логического анализа.

Задачи 8.20–8.25 (решения задач 8.23–8.25 достаточно сложные, поэтому здесь возможна помощь учителя, также можно вынести эти задачи на факультатив или оставить на дом).

8.20. Плоскость разбита прямыми линиями на равные равносторонние треугольники. Каждый треугольник окрашен одним цветом, причем любые два треугольника, соприкасающиеся сторонами или хотя бы вершинами, окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет условиям задачи?

8.21. Буратино взял квадрат клетчатой бумаги 5×5 клеток. Две клетки называются соседними, если у них хотя бы одна общая вершина. Каждую клетку он закрашивает одним цветом. У каждой клетки все ее соседки — разных цветов. Какое наименьшее число цветов потребуется?

8.22. Плоскость разбита прямыми линиями на треугольные клетки (см. рис. 58). Две клетки назовем соседками, если они имеют хотя бы одну общую вершину. Каждая клетка окрашена одним цветом, причем у любой клетки все соседки — разных цветов. Какое наименьшее число цветов потребуется для такой раскраски?

8.23. Плоскость разбита прямыми линиями на клетки — равные равносторонние треугольники. Клетки, имеющие общую сторону или общую вершину, называются соседками. Каждая клетка окрашена одним цветом. Известно, что у каждой клетки все соседки — разных цветов. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет условиям задачи?

8.24. Плоскость разбита прямыми линиями на клетки — равные дельтоиды — четырехугольники с углами $120°$, $90°$, $60°$, $90°$ — (рис. 60). Клетки, имеющие общую сторону или общую вершину, называются соседними. Каждая клетка окрашена одним цветом. Известно, что у каждой клетки все соседки — разных цветов.

а) Достаточно ли для такой раскраски плоскости 10 цветов?

б) Покажите, что для раскраски плоскости достаточно 12 цветов.

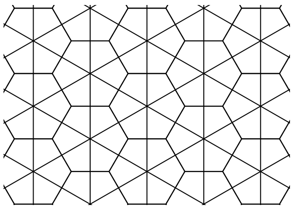


Рис. 60

8.25. Плоскость разбита прямыми линиями на клетки — равные треугольники с углами $30°$, $60°$, $90°$ (рис. 59). Две клетки называются соседками, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Каждую клетку окрашивают одним цветом. При этом у любой клетки все ее соседки должны быть разных цветов.

а) Докажите, что 18 цветов не хватит для раскраски плоскости в соответствии с этими условиями.

б) Покажите, что 24 цвета достаточно для раскраски плоскости.

Урок 8.5

Тема: Задачи с раскраской в условии.

Цель: Формирование представлений о топологических свойствах плоскости. Знакомство с проведением доказательства от противного.

Задачи 8.26–8.30 решаем на уроке, задачи 8.31, 8.32 — на дом.

8.26. Некоторые шестиугольные клетки на рис. 61 покрасили в черный цвет, а остальные — в красный. Докажите, что найдутся два отрезка одного цвета, расположенные на противоположных сторонах этой фигуры, соединенные дорожкой из шестиугольников того же цвета.

Методические рекомендации. Решение этой задачи рекомендуем рассказать учителю, как иллюстрацию проведения доказательства от противного.

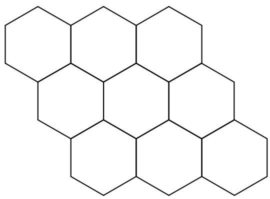


Рис. 61

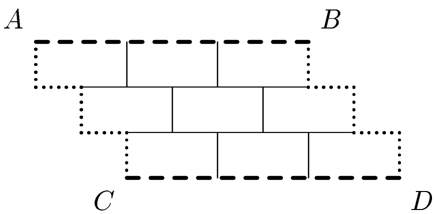


Рис. 62

8.27. Играют двое, Коля и Саша, делая ходы по очереди. Первым ходит Коля. В свой ход играющий закрашивает своим цветом (Коля красным, а Саша синим) одну клетку игрового поля, изображенного на рис. 62. Выиграет тот, кому удастся проложить дорожку из плиток своего цвета, соединяющую края поля того же цвета (ломаные AC и BD — красные, AB и CD — синие). Кто выиграет при правильной игре?

8.28. Квадрат 8×8 клеток разделен на 32 доминошки (прямоугольники из двух клеток). Докажите, что можно покрасить по 8 доминошек белой, черной, красной, и синей красками так, что любые две доминошки, граничащие по отрезку ненулевой длины, были бы покрашены различно.

8.29. Некоторые клетки прямоугольника 11×15 клеток (11 строк и 15 столбцов) белые, а остальные черные. Известно, что в каждой строке прямоугольника белых клеток больше, чем черных. Докажите, что хотя бы в одном столбце белых клеток больше, чем черных.

8.30. Через клетчатый квадрат 1000×1000 провели по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся при этом прямоугольники раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что число черных клеток четно.

8.31. Клетки квадрата 100×100 покрашены в черный и белый цвет таким образом, что в любом прямоугольнике 1×2 хотя бы одна клетка черная, а в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две черные клетки, расположенные подряд. Какое наименьшее число черных клеток в таком квадрате?

8.32. Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата. Каждый из полученных 24 квадратов окрасили одним цветом, использовав три краски. Оказалось, что любые два квадрата, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Докажите, что квадратов каждого цвета по 8. Укажите пример такой раскраски.

Урок 8.6

Тема: Задачи с раскраской в условии.

Цель: Развивать пространственное воображение. Познакомиться со свойствами куба, тетраэдра, октаэдра. Поупражняться в решении задач с раскраской пространственных фигур.

Задачи 8.33–8.35, 8.37, 8.38, 8.40 (а, б), 8.41 решаем на уроке. Задачи 8.36, 8.39, 8.40 (в) — на дом.

8.33. Некоторые ребра куба красные, а остальные черные. Известно, что среди красных ребер нет параллельных. Какое наибольшее число красных ребер возможно при этих условиях?

8.34. Некоторые ребра куба красные, а остальные черные. Известно, что среди красных ребер никакие два не лежат в одной грани. Какое наибольшее число красных ребер возможно?

8.35. Некоторые ребра куба красные, а остальные черные. Известно, что в каждой вершине куба сходится не более двух красных ребер. Какое наибольшее число красных ребер возможно?

8.36. Некоторые ребра куба красные, а остальные черные. При этом в каждую вершину приходит не более одного красного ребра. Какое наибольшее число красных ребер возможно?

8.37. Некоторые ребра октаэдра красные, а остальные черные. Известно, что в каждой вершине сходятся не более двух красных ребер. Какое наибольшее число красных ребер возможно?

8.38. Некоторые ребра октаэдра красные, а остальные черные. Известно, что в каждой вершине сходятся не более трех красных ребер. Какое наибольшее число красных ребер возможно?

8.39. Некоторые ребра октаэдра черные, некоторые красные, а остальные синие. Известно, что в каждой вершине сходятся ребра всех трех цветов. а) Какое наибольшее число красных ребер возможно при этих условиях? б) Какое наименьшее число красных ребер возможно при этих условиях?

8.40. В какое наименьшее число красок можно покрасить ребра а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра так, чтобы каждое ребро было покрашено одной краской и два ребра, имеющие общую вершину, были покрашены в разные цвета?

8.41. а) Некоторые ребра тетраэдра черные, а остальные красные. Длина каждого ребра 1. Оказалось, что красные ребра составляют пространственную замкнутую ломаную без самопересечений. Какова наибольшая возможная длина такой ломаной?

б) Задача, аналогичная пункту а), но для октаэдра с длиной каждого ребра 1.

в) Задача, аналогичная пункту а), но для куба с длиной ребра 1.

Урок 8.7

Тема: Стереометрия многогранников в пространстве.

Цель: Развивать пространственное воображение. Познакомиться со свойствами куба, тетраэдра, октаэдра, икосаэдра, додекаэдра. Поупражняться в решении задач с раскраской пространственных фигур.

Задачи 8.42–8.52.

8.42. Некоторые ребра икосаэдра черные, некоторые красные, а остальные синие. Известно, что в каждой вершине сходятся ребра всех цветов. Какое наибольшее число красных ребер возможно при этих условиях?

8.43. Два ребра многогранника, имеющие общую вершину, назовем соседями. В какое наименьшее число красок можно покрасить ребра а) икосаэдра; б) додекаэдра так, чтобы каждое ребро было покрашено одной краской и у каждого ребра все его соседи были разных цветов?

8.44. Некоторые грани икосаэдра черные, некоторые белые, а остальные серые. Известно, что в каждой вершине сходятся грани всех трех цветов. Какое наибольшее число белых граней возможно? Какое наименьшее число черных граней возможно?

8.45. Некоторые грани икосаэдра красные, некоторые черные, некоторые синие, а остальные белые. Известно, что в каждой вершине сходятся грани всех четырех цветов. Какое наибольшее число красных граней возможно? Какое наименьшее число синих граней возможно?

8.46. Некоторые грани додекаэдра красные, а остальные черные. Известно, что в каждой вершине додекаэдра сходится не более двух красных граней. Какое наибольшее число красных граней возможно?

8.47. Некоторые грани икосаэдра красные, а остальные черные. Известно, что в каждой вершине сходятся не более трех красных граней. Какое наибольшее число красных граней возможно?

8.48. а) Некоторые грани икосаэдра красные, а остальные черные. Известно, что у каждой красной грани ровно две красные соседки, смежные с ней по стороне. Какое наибольшее число красных граней возможно при этих условиях?

б) Некоторые грани додекаэдра красные, а остальные черные. Известно, что у каждой красной грани ровно две красные соседки (смежные с ней по стороне). Какое наибольшее число красных граней возможно при этих условиях?

8.49. а) Каждая вершина додекаэдра окрашена в какой-либо цвет, причем любые две вершины, соединенные ребром, окрашены поразному. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

б) Каждая грань икосаэдра окрашена одним цветом, причем любые две смежные грани окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

8.50. а) Каждая вершина икосаэдра окрашена в какой-либо цвет, причем любые две вершины, соединенные ребром, окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

б) Каждая грань додекаэдра окрашена одним цветом, причем любые две смежные грани окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

8.51. а) Каждая грань додекаэдра окрашена одним цветом. При этом все грани, смежные с любой данной, имеют разную окраску. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

б) Все вершины икосаэдра окрашены. При этом для любой вершины все вершины, соединенные с ней ребром, окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

8.52. а) Каждая грань икосаэдра окрашена одним цветом. При этом все грани, смежные с любой данной, имеют разную окраску. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

б) Каждая вершина додекаэдра окрашена. Известно, что у каждой вершины все ее соседки — разных цветов. Какое наименьшее число цветов удовлетворяет этому условию?

Раздел 2
Факультативные задачи

§9. Превращение фигур

Урок 9.1

Тема: Превращение фигур.

Цель: Научиться разрезать геометрические фигуры на части, необходимые для составления той или иной другой геометрической фигуры, используя их свойства и признаки.

Задачи 9.1, 9.2 можно решить для разминки в начале урока, затем решаем задачи 9.3–9.11.

9.1. Вася утверждает, что у него есть бумажная фигурка, которую можно перегнуть одним способом — и получится правильный треугольник; можно перегнуть другим способом — и получится прямоугольник. Не хвастает ли Вася?

9.2. Вася утверждает, что у него есть бумажная фигурка, которую можно перегнуть одним способом — и получится квадрат; можно перегнуть другим способом — и получится равнобедренный треугольник; можно перегнуть третьим способом — и получится параллелограмм. А не хвастает ли Вася?

9.3. Как можно равносторонний треугольник разрезать на а) два равных треугольника; б) три равных треугольника; в) четыре равных треугольника; г) шесть равных треугольников; д) восемь равных треугольников; е) двенадцать равных треугольников?

9.4. Разрежьте правильный треугольник на а) три равных трапеции; б) три равных пятиугольника.

9.5. Как данный прямоугольник двумя прямолинейными разрезами разбить на два равных пятиугольника и два равных прямоугольных треугольника?

9.6. Разрежьте правильный шестиугольник на три равных пятиугольника.

9.7. Как данный прямоугольник следует разбить на две такие части, чтобы из них можно было составить а) треугольник; б) параллелограмм, не являющийся прямоугольником; в) трапецию?

9.8. Дан прямоугольник, ширина которого в два раза меньше длины. Разрежьте этот прямоугольник а) на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник; б) на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

9.9. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, P, N, S, Q — середины его сторон. Шестиугольник $PABCQT$ (рис. 63) разрежьте на четыре равных многоугольника, из которых можно составить прямоугольник.

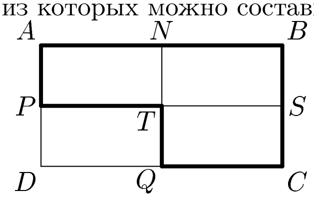


Рис. 63

9.10. Разрежьте правильную шестиконечную звезду на части, из которых можно было бы сложить параллелограмм.

9.11. На какое наименьшее число частей можно разрезать правильный шестиугольник так, чтобы из этих частей можно было составить треугольник с углами 30°, 60°, 90°?

Урок 9.2

Тема: Геометрия превращения квадрата.

Цель: Научиться разрезать квадрат на части так, чтобы из полученных частей можно было составить требуемую фигуру.

Задачи 9.12–9.17.

9.12. Разрежьте квадратный лист бумаги на три части, из которых можно сложить тупоугольный треугольник.

9.13. Дан квадрат $ABCD$, точки P, Q, M, N — середины его сторон, L — середина отрезка PQ (рис. 64). Из этих четырех многоугольников составьте равнобедренный треугольник.

9.14. Квадрат $ABCD$ разбит на четыре детали (см. рис. 65). Здесь $MB = 2EH$. Составьте из этих деталей прямоугольный треугольник, меньший катет которого MB, а гипотенуза вдвое длиннее гипотенузы EC треугольника EHC.

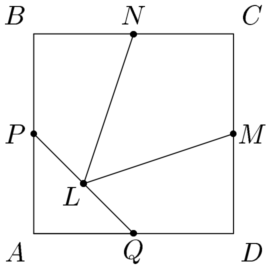


Рис. 64

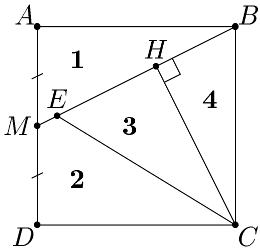


Рис. 65

9.15. Разрежьте два неравных квадрата на части, из которых можно было бы составить один большой квадрат.

9.16. Разрежьте три одинаковых квадрата на части, из которых затем можно сложить большой квадрат.

9.17. Разрежьте пять равных квадратов на части, из которых затем можно сложить один большой квадрат.

Урок 9.3

Тема: Превращение фигур.

Цель: Научиться разрезать фигуры на части, из которых можно сложить другие фигуры.

Задачи 9.18–9.26.

9.18. Разрежьте произвольный треугольник на три многоугольника, из которых можно сложить прямоугольник.

9.19. У столяра была прямоугольная доска 40 см $\times$ 90 см. Он распилил ее на три части и склеил из них квадрат 60 см $\times$ 60 см. Покажите, как была распилена доска.

9.20. Прямоугольник размерами $a \times b$ перекроите в равновеликий ему прямоугольник размерами $p \times q$.

9.21. Пару прямоугольников перекроите в один прямоугольник.

9.22. Верно ли, что любой многоугольник можно разрезать на несколько частей, из которых можно затем сложить квадрат?

9.23. Теорема Бойаи–Гервина. Докажите, что два многоугольника равновелики тогда и только тогда, когда они равносоставлены.

9.24. Покажите, что любую трапецию можно разрезать на части, из которых затем можно сложить параллелограмм, средняя линия которого равна средней линии трапеции.

9.25. Разрежьте данный треугольник на части, из которых можно сложить прямоугольный треугольник.

9.26. Даны два неравных квадрата. Как их следует разрезать на такие части, чтобы из них можно было сложить один квадрат? Как выражается длина стороны третьего квадрата через длины сторон двух данных?

§10. Разные задачи на разрезание

Урок 10.1

Тема: Задачи на разрезание.

Цель: Попрактиковаться в решении задач на разрезание различных типов.

Задачи 10.1–10.7.

10.1. Можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равносторонних треугольника? А на 16? А на 7? А на 100?

10.2. Верно ли, что треугольник, все стороны которого равны 1998 метрам, можно разрезать на 1998 равносторонних (не обязательно равных) треугольника?

10.3. Можно ли шестиугольный торт (рис. 66) разрезать на 11 равных кусков по указанным линиям?

10.4. Можно ли треугольный торт (рис. 67) разрезать на 12 равных кусков по указанным линиям?

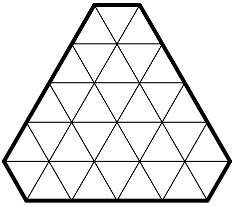


Рис. 66

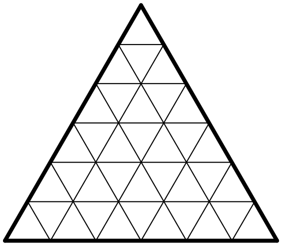


Рис. 67

10.5. Тришка отрезал от кафтана квадратный кусок, разрезал его на 9 треугольных заплат и сложил их в три кучки по три заплаты. Могло ли оказаться так, что любые две заплаты из одной кучки равны друг другу, а из разных кучек — не равны?

10.6. От равностороннего треугольника отрезали его четвертую часть (по средней линии). Разрежьте оставшуюся часть на четыре равные части.

10.7. Можно ли разрезать квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) ровно с тремя другими?

Урок 10.2

Тема: Задачи на разрезание.

Цель: Совершенствование комбинаторно-геометрических навыков учащихся.

Задачи 10.8–10.13.

10.8. Докажите, что выпуклый пятиугольник можно разрезать на три трапеции. Верно ли это для невыпуклого пятиугольника?

10.9. Докажите, что любой непрямоугольный треугольник можно разрезать на три трапеции, среди которых нет прямоугольных.

10.10. Разрежьте квадрат на восемь трапеций, среди которых нет прямоугольных.

10.11. Как разрезать квадрат на остроугольные треугольники?

10.12. Барон Мюнхгаузен утверждает, что построил равнобедренный треугольник, который разбит на три треугольника двумя отрезками, выходящими из одной и той же вершины, причем из любых двух из этих трех треугольников вновь составляется равнобедренный треугольник. Можно ли верить барону?

10.13. Незнайка думает, что только правильный треугольник можно разрезать на три равных треугольника (рис. 68). Прав ли он?

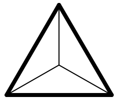


Рис. 68

Урок 10.3

Тема: Задачи на разрезание.

Цель: Совершенствование комбинаторно-геометрических навыков учащихся.

Задачи 10.14–10.20.

10.14. Три одинаковых треугольника разрезали по разноименным медианам (рис. 69). Можно ли из этих шести треугольников сложить один треугольник?

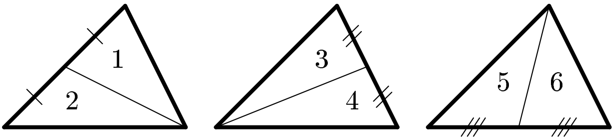


Рис. 69

10.15. Два одинаковых бумажных выпуклых четырехугольника разрезали: первый — по одной диагонали, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных треугольников можно сложить параллелограмм.

10.16. Можно ли разрезать квадрат на 1000-угольник и 199 пятиугольников?

10.17. а) Прямоугольник клетчатой бумаги размером 19×98 клеток разбит голубыми линиями на $19 \cdot 98 = 1862$ клетки. А на сколько частей он разбит, если проведена еще его диагональ?

б) Прямоугольник клетчатой бумаги размером 98×1998 клеток разбит голубыми линиями на $98 \cdot 1998 = 195804$ клетки. А на сколько частей он разбит, если проведена еще его диагональ?

10.18. В круге отметим точку. Разрежьте круг на три части так, чтобы из них можно было составить новый круг с центром в отмеченной точке.

10.19. На какое наименьшее число остроугольных треугольников можно разрезать тупоугольный треугольник?

10.20. Взяли бумажный круг и ножницы, которые позволяют делать прямолинейные разрезы и разрезы в виде дуг окружностей. Можно ли перекроить этот круг в квадрат той же площади, выполнив конечное число разрезов?

§11. Площади фигур

Урок 11.1

Тема: Равносоставленные фигуры.

Цель: Научиться доказывать, что площади фигур равны, разрезая их на определенные части и доказывая, что эти фигуры равносоставлены.

Задачи 11.1–11.6.

11.1. Покажите, что у пятиугольной звезды на рис. 70 закрашена ровно половина площади.

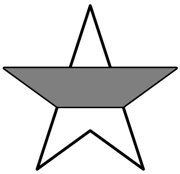


Рис. 70

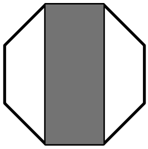


Рис. 71

11.2. В правильном выпуклом восьмиугольнике провели две параллельные диагонали (рис. 71). Докажите, что площадь черной части равна площади белой части.

11.3. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC; MK и NH — перпендикуляры к стороне AC (рис. 72). Докажите, что площадь закрашенной части треугольника равна площади не закрашенной части.

11.4. Листок календаря частично закрыт предыдущим листком, как показано на рис. 73. Какая часть нижнего листка больше по площади, открытая или закрытая?

11.5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Соединим его вершины диагоналями через одну, как показано на рис. 74. Площадь какой части больше, черной или белой?

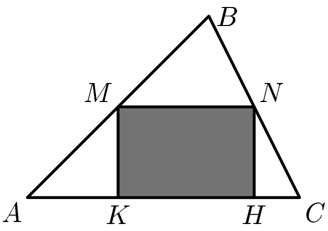


Рис. 72

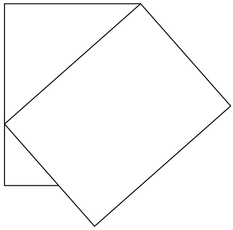


Рис. 73

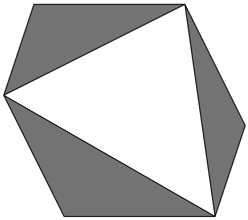


Рис. 74

11.6. Известно, что для некоторого выпуклого шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ выполнены равенства

$$AB_1 = B_1C, \quad CA_1 = A_1B, \quad BC_1 = C_1A,$$
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1.$$

Докажите, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ составляет половину площади всего шестиугольника.

Урок 11.2

Тема: Площади фигур.

Цель: Научиться доказывать равенство площадей фигур, используя некоторые стандартные приемы (например, равносоставленность).

Задачи 11.7–11.9 — основные, задачи 11.10, 11.11 — дополнительные.

11.7. Сэр Артур заказал художнику рисунок для своего щита, имеющего форму четверти круга, попросив раскрасить его в три цвета: желтый — цвет щедрости, красный — храбрости и синий — мудрости. Когда художник принес раскрашенный щит (рис. 75), то оруженосец заметил, что на рисунке храбрости больше, чем мудрости. Однако художник смог доказать, что это неверно, и что мудрости и храбрости поровну. Как он это сделал?

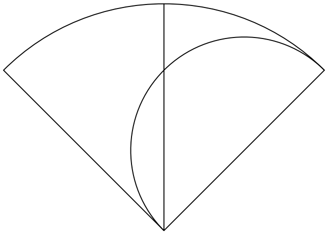


Рис. 75

11.8. На соседних сторонах прямоугольника выбрали по точке (A и B) произвольно. Точки A и B соединили с вершинами прямоугольника, как указано на рис. 76. Покажите, что сумма площадей трех серых участков равна площади черного участка.

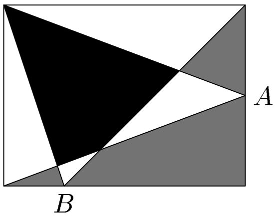


Рис. 76

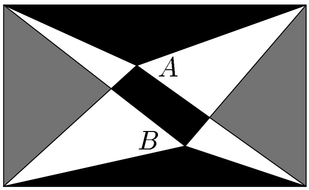


Рис. 77

11.9. В прямоугольнике произвольным образом взяты точки A и B, они соединены с вершинами прямоугольника, как показано на рис. 77. Докажите, что сумма площадей серых частей равна сумме площадей черных.

11.10. Как в треугольнике ABC провести ломаную $BDEFG$ (рис. 78), чтобы все пять полученных треугольников имели равные площади?

11.11. Внутри большего квадрата расположен меньший, стороны которого параллельны соответствующим сторонам большего. Отрезками соединили вершины квадратов, как показано на рис. 79.

Докажите, что площадь заштрихованных трапеций равна площади не заштрихованных.

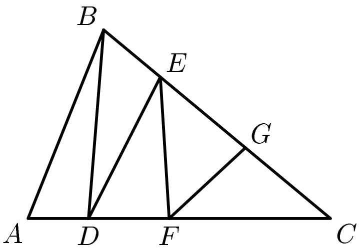


Рис. 78

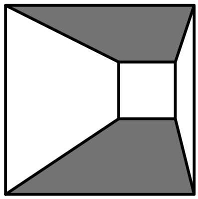


Рис. 79

ОТВЕТЫ
И
РЕШЕНИЯ

Раздел 1

§1. Задачи на клетчатой бумаге

Урок 1.1

1.1. *Ответ.* См. рис. 80. Задача имеет 6 решений, если не различать лицевую и изнаночную стороны.

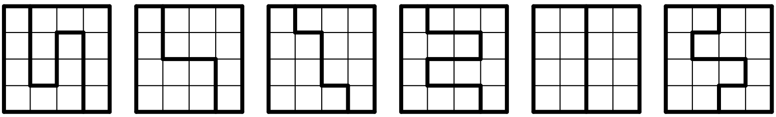


Рис. 80

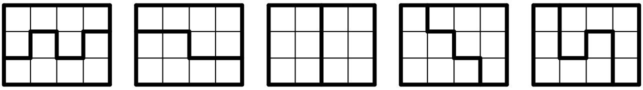


Рис. 81

1.2. *Ответ.* См. рис. 81.

1.3. *Ответ.* См. рис. 82. Дополнительный вопрос: есть ли у этой задачи другие решения?

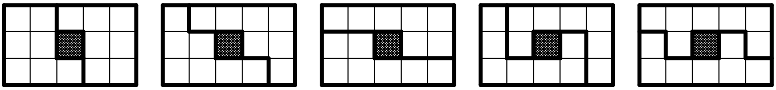


Рис. 82

1.4. *Ответ.* См. рис. 83.

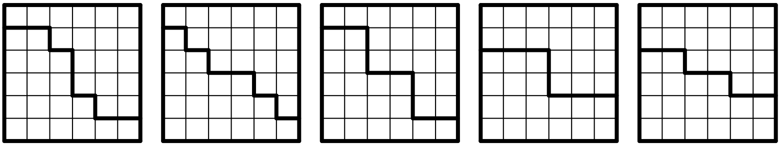


Рис. 83

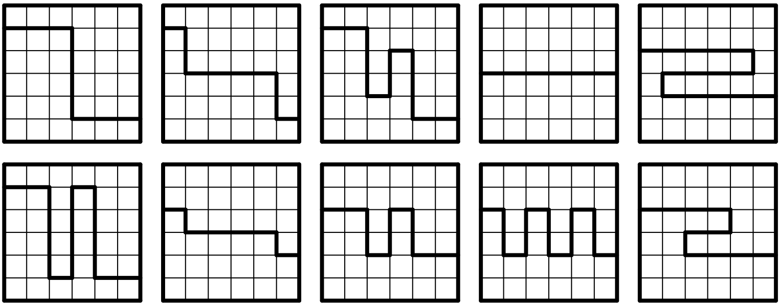


Рис. 84

1.5. *Ответ.* Еще 10 решений см. на рис. 84.

Урок 1.2

1.6. *Решение.* Нельзя, так как квадрат состоит из 25 клеток. Его нужно разрезать на две равные части. Поэтому в каждой части должно быть по 12,5 клеток, а значит, линия разреза будет проходить не по сторонам клеток.

1.7. *Ответ.* Пять способов (рис. 85), причем третий и четвертый способы разрезания различны, но части, на которые разрезается квадрат, одинаковые.

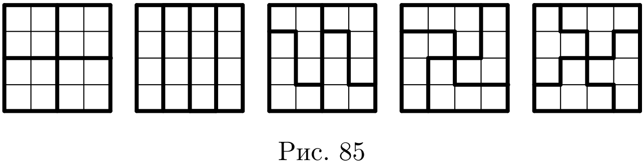


Рис. 85

1.8. *Ответ.* См. рис. 86.

1.9. *Ответ.* См. рис. 87.

1.10. *Решение.* Заметим, что данная фигура имеет центр симметрии. После этого замечания фигуру поделить легко. Также нужно учесть, что каждая часть будет содержать по 5 клеток. *Ответ.* См. на рис. 88.

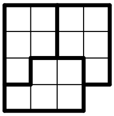


Рис. 86

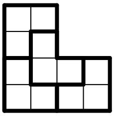


Рис. 87

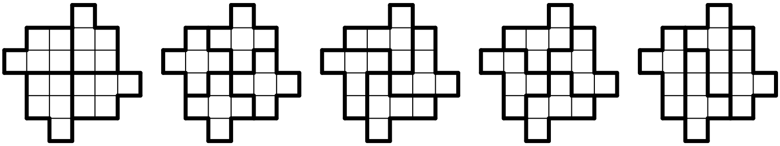


Рис. 88

1.11. *Ответ.* Семь способов см. на рис. 89.

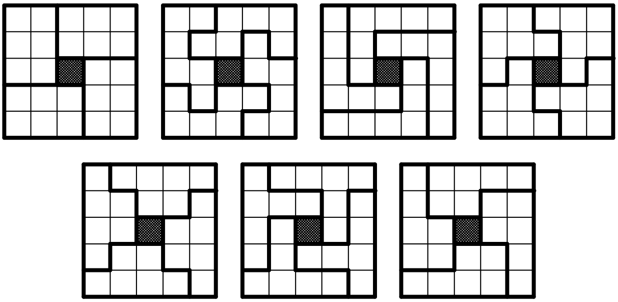


Рис. 89

Урок 1.3

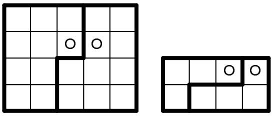
1.12. *Ответ.* См. рис. 90 (а, б).

1.13. *Ответ.* См. рис. 91.

1.14. *Ответ.* Как разрезать фигуру, смотрите на рис. 92 (а), а как из полученных частей сложить квадрат — на рис. 92 (б).

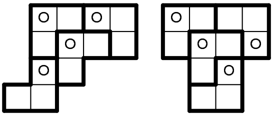
1.15. *Ответ.* См. рис. 93.

1.16. *Ответ.* См. рис. 94.



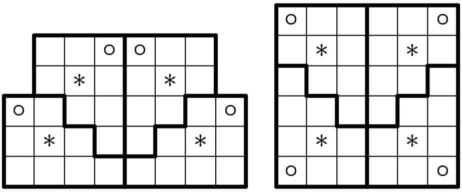
Б) В)

Рис. 90



Б) В)

Рис. 91



Б) В)

Рис. 92

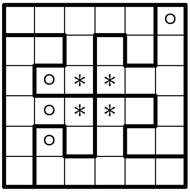


Рис. 93

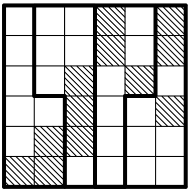
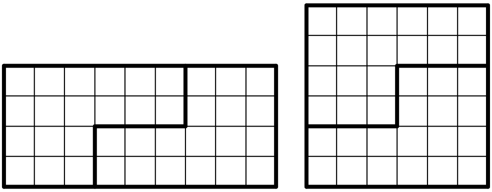


Рис. 94

Урок 1.4

1.17. *Решение.* Посмотрим, сколько клеток будет содержать квадрат. $4 \cdot 9 = 36$, значит, сторона квадрата — 6 клеток, так как $36 = 6 \cdot 6$. Как разрезать прямоугольник — показано на рис. 95 (а). Это способ разрезания называют ступенчатым. Как из полученных частей составить квадрат — показано на рис. 95 (б).

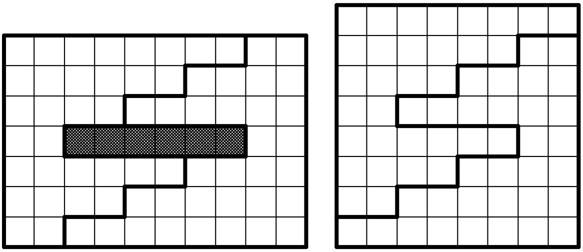


Б) В)

Рис. 95

1.18. *Решение.* Нельзя, так как квадрат должен состоять из $4 \cdot 8 = 32$ клеток, а значит, его сторона будет меньше 6 клеток, но больше 5, то есть нецелым числом. Поэтому разрезание по сторонам клеток невозможно.

1.19. *Решение.* Площадь полученной фигуры 64 кв. ед., так как $10 \cdot 7 = 70$ (кв. ед.), $1 \cdot 6 = 6$ (кв. ед.), $70 - 6 = 64$ (кв. ед.). Поэтому квадрат будет со стороной 8 клеток. Как разрезать прямоугольник — показано на рис. 96 (а), а как из этих частей составить квадрат — на рис. 96 (б).



Б) В)

Рис. 96

1.20. *Решение.* Имеем, $8 \cdot 9 = 72$, $72 - 12 = 60$. Поэтому исходный прямоугольник с вырезанными фигурами содержит 60 клеток. Так как $6 \cdot 10 = 60$, то, по-видимому, искомый прямоугольник составить можно. Как разрезать прямоугольник — показано на рис. 97 (а), а как из этих частей составить новый прямоугольник — на рис. 97 (б).

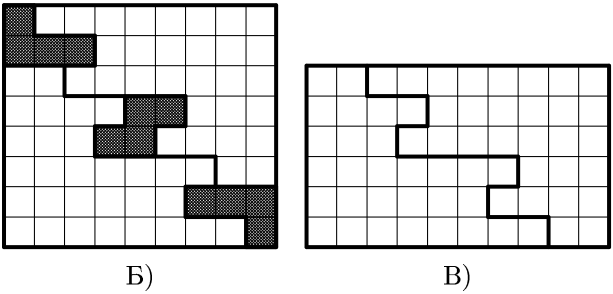


Рис. 97

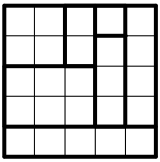


Рис. 98

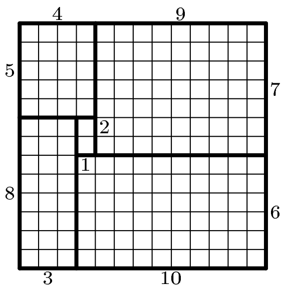


Рис. 99

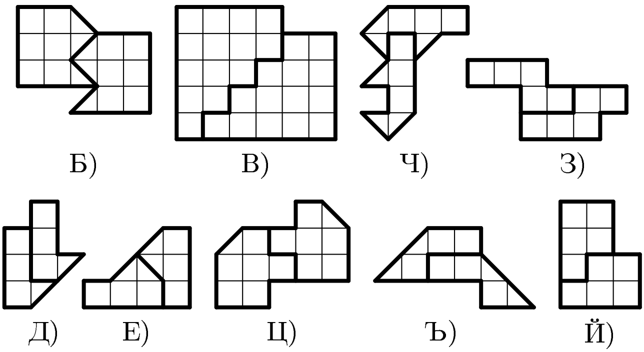
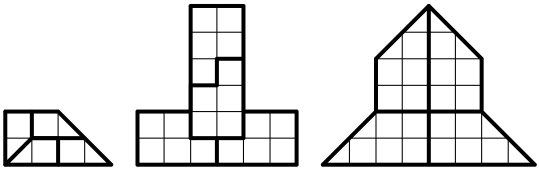


Рис. 100

1.21. *Ответ.* См. рис. 98.
1.22. *Ответ.* См. рис. 99.
1.23. *Ответ.* См. рис. 100.
1.24. *Ответ.* См. рис. 101.



Б) В) Ч)

Рис. 101

§2. Пентамино

Урок 2.1

2.1. *Ответ.* См. рис. 102.
2.2. *Ответ.* Двенадцать фигур. См. рис. 103.

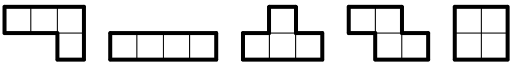


Рис. 102

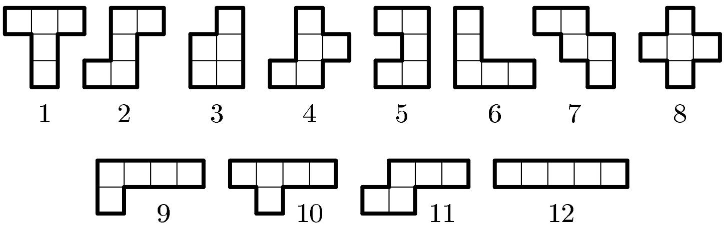


Рис. 103

2.3. *Ответ.* См. рис. 104. В случаях а), б) задача имеет одно решение, в случаях в), г) — два решения, в случае д) — три решения, а в случае е) — семь.

2.4. *Ответ.* Семь решений, см. рис. 105.

2.5. *Ответ.* См. рис. 106.

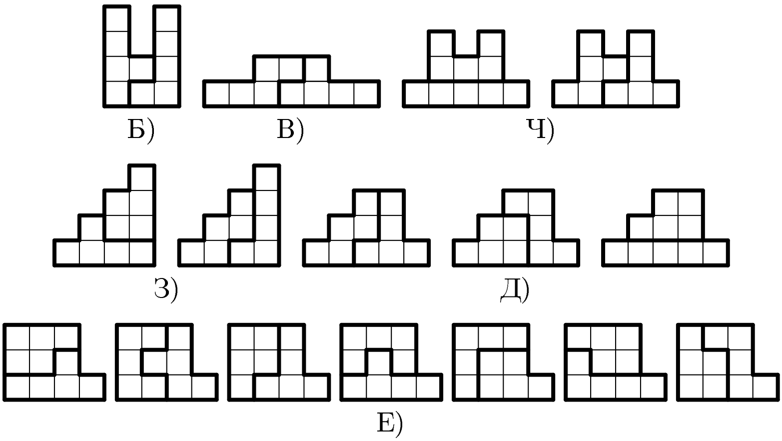


Рис. 104

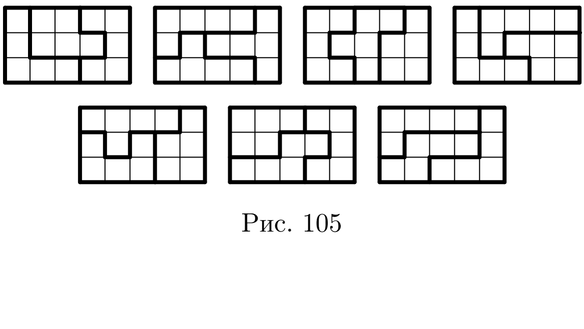


Рис. 105

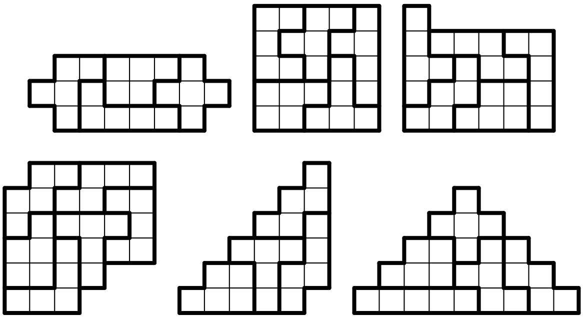


Рис. 106

Урок 2.2

2.6. *Ответ.* Фигуры 1, 5, 6, 7 имеют одну ось симметрии, у фигуры 12 — две оси симметрии, у фигуры 8 — четыре оси (рис. 107). Остальные фигуры не имеют осей симметрии.

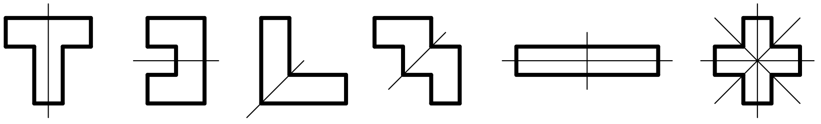


Рис. 107

2.7. *Ответ.* Один из вариантов решения см. на рис. 108.

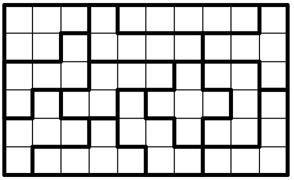


Рис. 108

Рекомендация учителю: записывать новые решения задач, найденные учащимися. Собрав много решений какой-либо задачи, ее можно использовать в соревновании «кто найдет больше решений».

2.8. *Ответ.* Известно, что из нескольких тысяч различных способов составления прямоугольника 6×10 (фигуры, переходящие друг в друга при отражении или повороте, не считаются разными), только два удовлетворяют поставленному условию (во всяком случае, другие неизвестны). Ответ см. на рис. 109. Второе решение замечательно тем, что прямоугольник можно разрезать по внутренним линиям на две равные части.

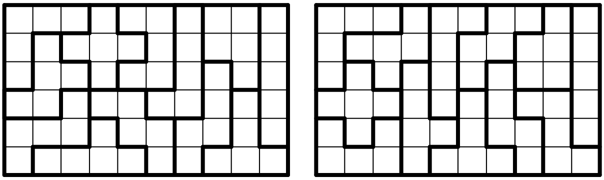


Рис. 109

2.9. *Ответ.* См. рис. 110.

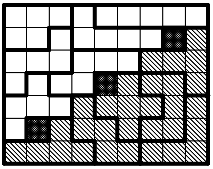


Рис. 110

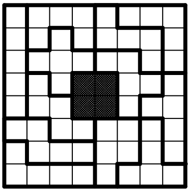


Рис. 111

2.10. *Ответ.* Одно из решений см. на рис. 111.
2.11. *Ответ.* См. рис. 112.
2.12. *Ответ.* См. рис. 113.

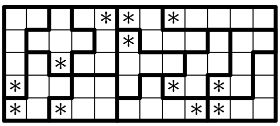


Рис. 112

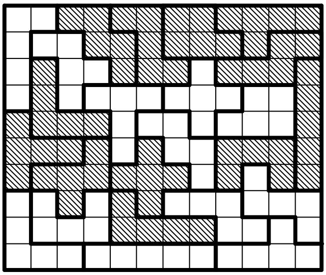


Рис. 113

§3. Трудные задачи на разрезание

Урок 3.1

3.1. *Ответ.* См. рис. 114.

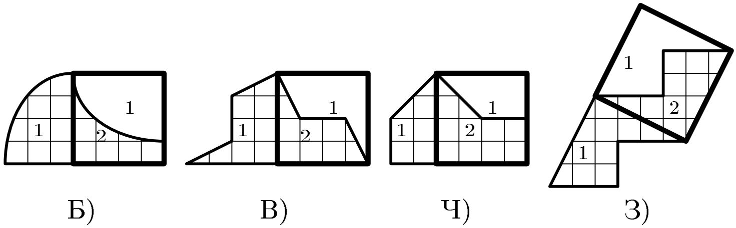


Рис. 114

3.2. *Ответ.* См. рис. 115.

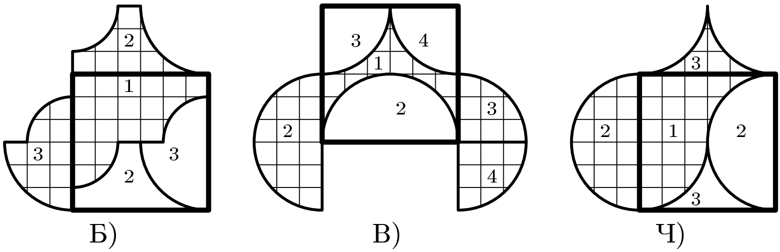


Рис. 115

3.3. *Ответ.* См. рис. 116. Камень нужно повернуть на 90 градусов по часовой стрелке.

3.4. *Решение.* Если разрезать кольцо на части и сложить их, то получится квадрат (рис. 117). Поэтому краски на окрашивание квадрата пойдет столько же, что и на окрашивание кольца.

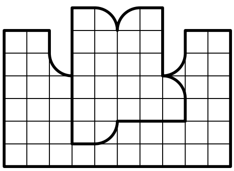


Рис. 116

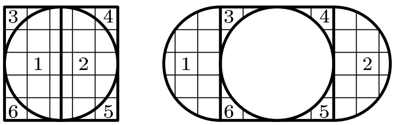


Рис. 117

3.5. *Ответ.* См. рис. 118. Сторона ромба равна 10 клеток.

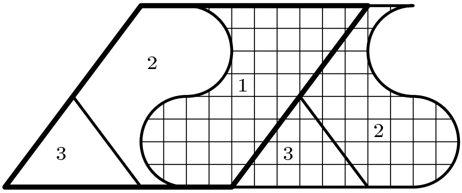


Рис. 118

Урок 3.2

3.6. *Ответ.* Два способа см. рис. 119 (а, б).

3.7. *Ответ.* См. рис. 120.

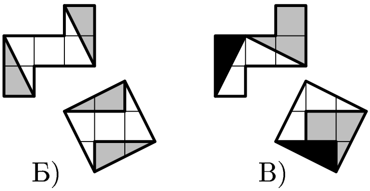


Рис. 119

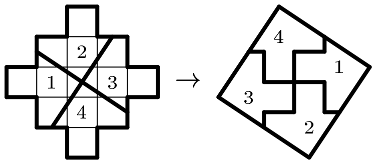


Рис. 120

3.8. *Ответ.* На первый вопрос — рис. 121, на второй — рис. 122 (части 1 и 4 следует перевернуть).

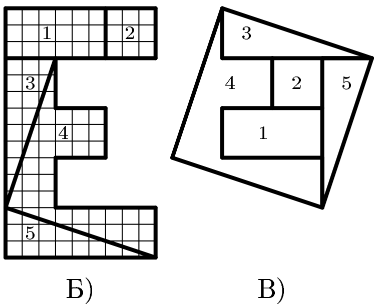


Рис. 121

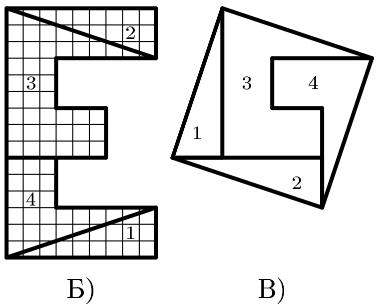


Рис. 122

3.9. *Ответ.* На рис. 123 (а), смотрите первое решение задачи, а на рис. 123 (б) — второе, здесь задача решается проведением всего двух прямых линий.

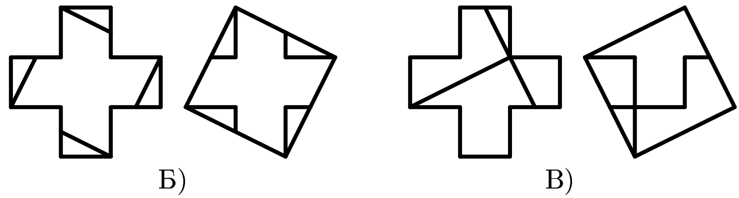


Рис. 123

3.10. *Ответ.* См. рис. 124.

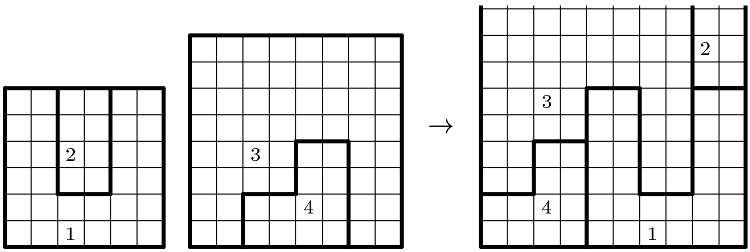
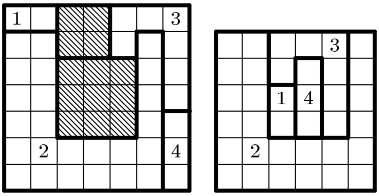


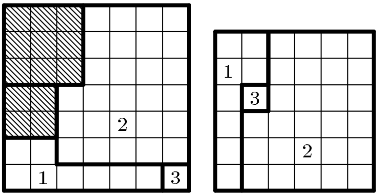
Рис. 124

3.11. *Решение.* Заметим, что $7 \cdot 7 = 49$. Квадраты, которые можно составить, имеют площади $1{\cdot}1 = 1$, $2{\cdot}2 = 4$, $3{\cdot}3 = 9$, $4{\cdot}4 = 16$, $5{\cdot}5 = 25$, $6{\cdot}6 = 36$ клеток. Какие три квадрата возможно сделать, чтобы материала не осталось? Если один из квадратов будет 6×6, то квадраты 4×4, 5×5 не подойдут, так как $36 + 16 = 52$, а $52 >> 49$. Посмотрим, подойдут ли квадраты 3×3, 2×2. Да, $36 + 9 + 4 = 49$. Других вариантов нет. Как разрезать квадрат, показано на рис. 125 (а). Два новых квадрата заштрихованы, а как из остальных частей собрать третий квадрат — показано на рис. 125 (б).



Б) В)

Рис. 125



Б) В)

Рис. 126

3.12. *Ответ.* См. рис. 126.

§4. Разбиение плоскости

Урок 4.1

4.1. *Ответ.* См. рис. 127.

4.2. *Ответ.* См. рис. 128.

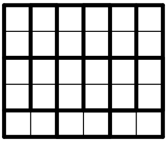


Рис. 127

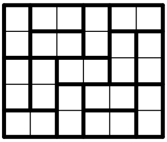
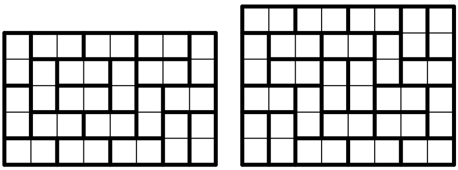


Рис. 128

4.3. *Ответ.* Оказывается, в этих случаях нельзя выложить сплошной паркет.

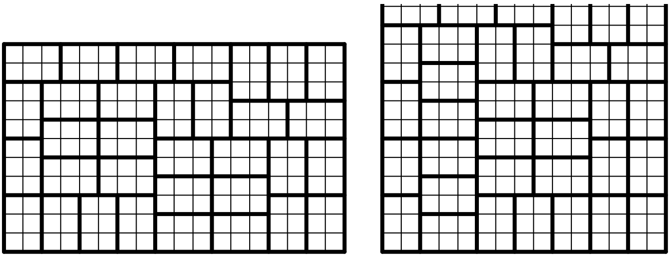
4.4. *Ответ.* См. рис. 129.



Б) В)

Рис. 129

4.5. *Ответ.* См. рис. 130.



Б) В)

Рис. 130

4.6. *Ответ.* Это невозможно.

4.7. *Ответ.* Да. Надо удалить центральную клетку. См. рис. 131.

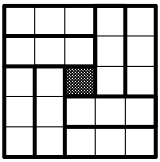


Рис. 131

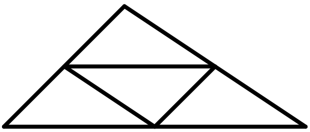
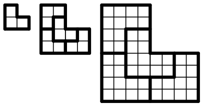


Рис. 132

Урок 4.2

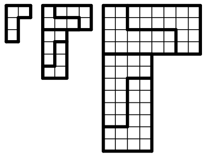
4.8. *Решение.* Нужно провести средние линии. Ответ смотрите на рис. 132.

4.9. *Решение.* **Первый способ.** а) Из четырех данных фигурок, можно сложить фигуру такой же формы (то есть подобную ей), но в четыре раза большей площади (рис. 133 (б)). Из четырех новых фигурок (большей площади) можно сложить таким же образом фигуру той же формы, но еще в четыре раза большей площади (рис. 133 (в)), и т. д. б) См. рис. 134. в) См. рис. 135.



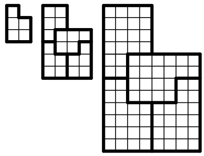
Б) В) Ч)

Рис. 133



Б) В) Ч)

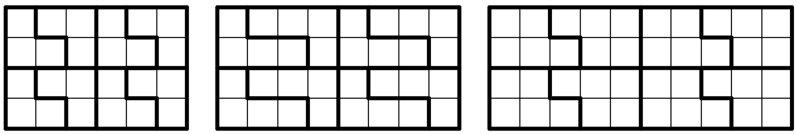
Рис. 134



Б) В) Ч)

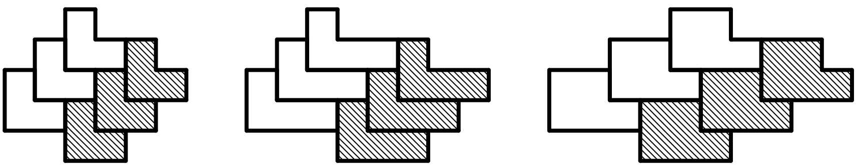
Рис. 135

Второй способ. Из двух фигурок складываем прямоугольник, а ими затем вымащиваем всю плоскость (рис. 136). Но это паркетажи с линиями разрыва, попробуйте составить сплошной паркетаж. Ответ см. на рис. 137.



Б) В) Ч)

Рис. 136



Б) В) Ч)

Рис. 137

4.10. *Решение.* Вымащиваем сначала полосу (рис. 138 (а, б)), а затем всю плоскость.

4.11. *Ответ.* Да. Должен получиться квадрат 12×12. По его периметру уложится 12 квадратов 3×3. Останется квадрат 6×6, по его периметру уложим 8 квадратов 2×2, и останется квадрат 2×2 — как раз 4 квадрата 1×1.

4.12. *Ответ.* Да. Вначале составим прямоугольники 2×3, 2×4, затем полоску 2×7, а потом полоску 2×14 (см. рис. 139). Семь таких фрагментов дают квадрат 14×14.

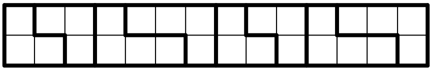


Рис. 139

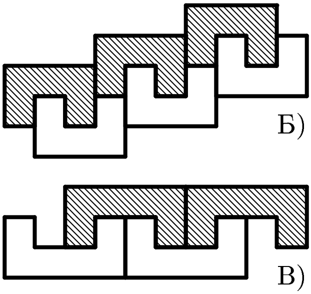


Рис. 138

Урок 4.3

4.13. *Ответ*: 12. Понятно, что больше 12 таких полосок выкроить нельзя, а как выкроить 12 — видно из рис. 140.

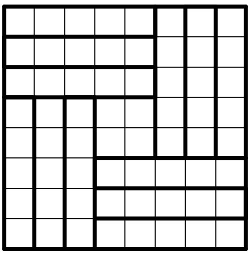


Рис. 140

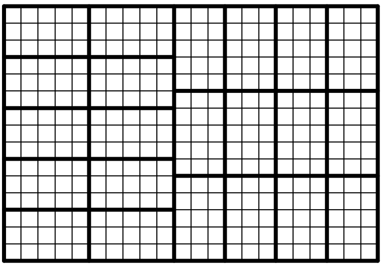


Рис. 141

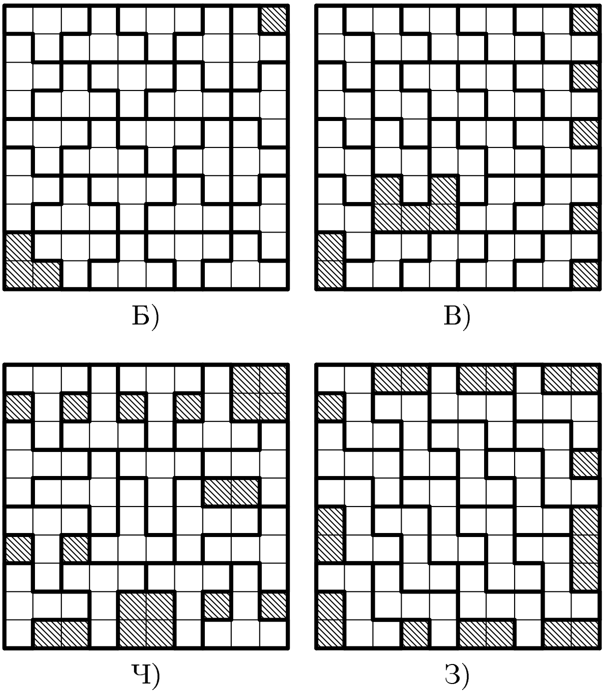


Рис. 142

4.14. *Ответ.* См. рис. 141.

4.15. *Решение.* Нет, так как число 23 нельзя представить в виде суммы пятерок и семерок.

4.16. *Ответ.* См. рис. 142. В случае (а) в квадрате умещается 24 целых фигуры, в случае (б) — 22, в случае (в) — 16, в случае (г) — 16. Пока способов разрезания, при которых получается больше целых фигурок, не найдено.

§5. Танграм

Урок 5.1

5.2. *Ответ.* См. рис. 143.

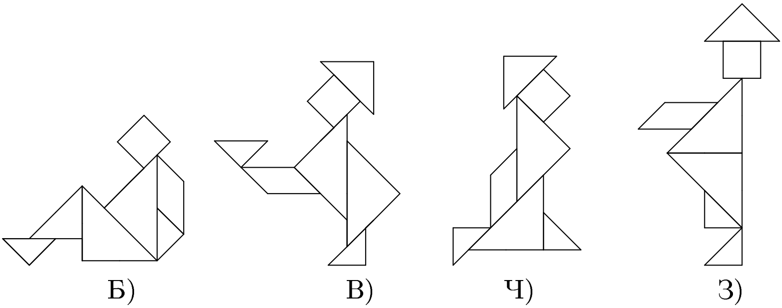


Рис. 143

5.4. *Ответ.* См. рис. 144.

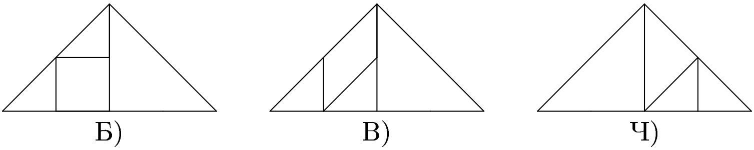


Рис. 144

5.5. *Ответ.* Из шести частей нельзя, а из двух, трёх, пяти и семи можно (рис. 145).

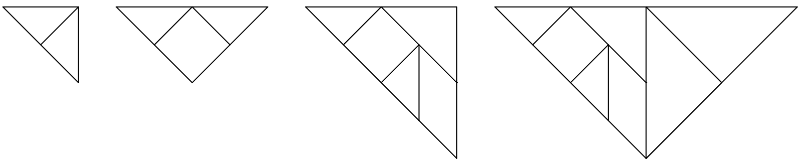


Рис. 145

5.6. *Ответ.* Можно. См. рис. 146.

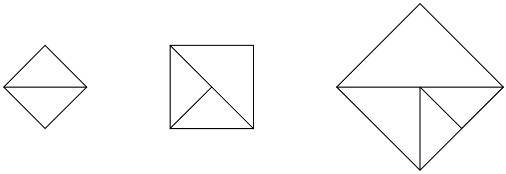
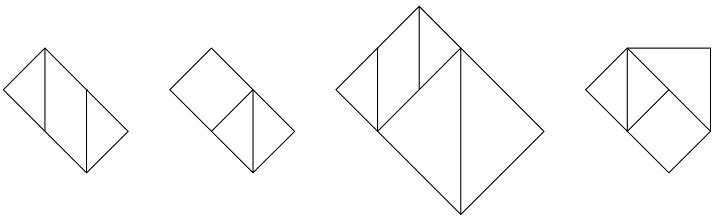


Рис. 146

5.7. *Решение.* Прямоугольник можно составить, например, из двух маленьких треугольников и параллелограмма (см. рис. 147 (а)), или из двух маленьких треугольников и квадрата (см. рис. 147 (б)). Также можно составить прямоугольник из пяти частей танграма (см. рис. 147 (в)) и из всех семи частей. Также из частей танграма можно составить, например, пятиугольник (см. рис. 147 (г)).



Б) В) Ч) З)

Рис. 147

§6. Задачи на разрезание в пространстве

Урок 6.1

6.1. *Ответ.* Подойдет, например, заготовка, изображенная на рис. 148.

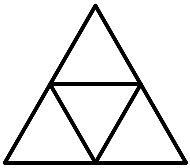


Рис. 148

6.2. *Ответ.* Не годятся заготовки, показанные на рис. 149 (б, ж).

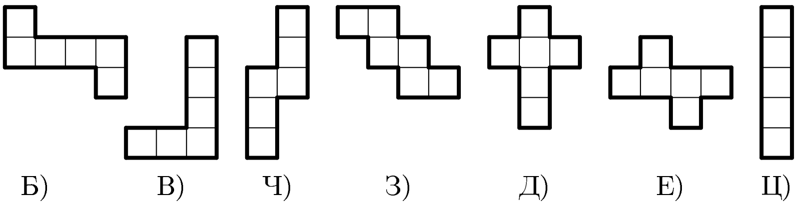


Рис. 149

6.3. *Решение.* Лиса права. Если боковую поверхность пирамиды разрезать по боковым ребрам и развернуть ее на плоскости, то получится фигура, изображенная на рис. 150 (общая вершина треугольников — это вершина пирамиды, сами треугольники — боковые грани пирамиды). На этом рисунке видно, что сумма углов при вершине пирамиды меньше 360°. А если все углы при вершине пирамиды были бы по 100°, то их сумма была бы 400°, что невозможно.

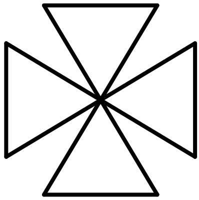


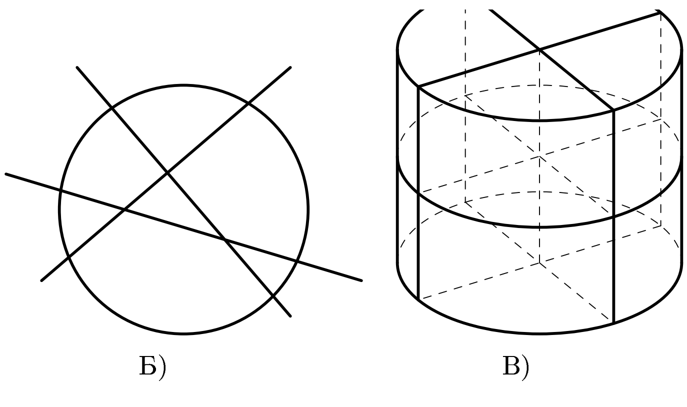
Рис. 150

6.4. *Решение.* За 6 разрезов. После каждого разреза число частей может возрасти не больше, чем в два раза. После первого разреза куб распался на 2 части, после второго — на 4, затем эти 4 части складываем в столбик и разрезаем их плоским разрезом, получается 8 частей, затем 16, затем 32 и, наконец, 64.

6.5. *Решение.* Маленьких кубиков получилось $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ штук. По три грани окрашено у кубиков, которые расположены в вершинах куба. Вершин 8, следовательно, таких кубиков 8. У кубиков, расположенных вдоль ребер (исключая кубики, лежащие в вершинах), окрашено по две грани. Таких кубиков по три вдоль каждого ребра, значит всего таких кубиков $12 \cdot 3 = 36$, так как у куба 12 ребер. По одной грани окрашено у тех кубиков, которые лежат «на поверхности», исключая кубики, прилежащие к ребрам, то есть по 9 штук на каждой грани. Граней у куба 6, следовательно, таких кубиков $9 \cdot 6 = 54$. Неокрашенных осталось $3 \cdot 3 \cdot 3 = 125 - 8 - 36 - 54 = 27$ кубиков.

6.6. *Решение.* Да, если одна часть вырезана в виде «столбика», идущего через весь арбуз. У этого куска две корки, соединенные мякотью. Остальной арбуз можно разрезать на «нормальные» куски.

6.7. *Решение.* Блин можно разрезать на 7 частей (смотрите рис. 151 (а)), а каравай хлеба на 8 (см. рис. 151 (б)).



Б) В)

Рис. 151

§7. Задачи на раскраску

Урок 7.1

7.1. *Решение.* Нельзя. Рассмотрим шахматную доску 8×8, уберем две черные клетки (левую нижнюю и правую верхнюю (рис. 152)). Каждая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетку. Фигура, которую можно покрыть доминошками, должна содержать белых и черных клеток поровну. В нашей же фигуре белых клеток больше, чем черных.

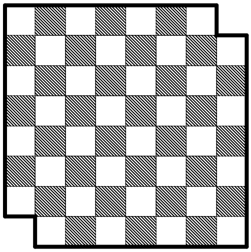
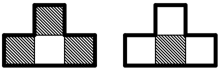


Рис. 152

7.2. *Решение.* Если «верблюд» стоял на белой клетке шахматной доски, то после очередного хода он вновь окажется на белом поле. И сколько бы раз и в каком бы направлении он не ходил, на соседнем по стороне, то есть на черном поле, он оказаться не может. Аналогичные рассуждение проводим, когда «верблюд» стоит на черном поле.

7.3. *Решение.* Раскрасим клетки квадрата в шахматном порядке. Черных клеток получилось 13, а белых — 12. Каждый жук, сидящий на белой клетке, переползает на черную клетку, а каждый жук, сидящий на черной клетке, переползает на белую клетку (по условию задачи). Предположим, что 12 жуков, сидящих на черных клетках, переползают каждый на свою белую клетку. Но 13-му жуку, сидящему на черной клетке, белой клетки не досталось (так как их всего 12), поэтому в какой-то белой клетке будут сидеть два жука. А одна черная клетка обязательно останется свободной, так как даже если предположить, что 12 жуков, сидящих на белых клетках, переползут каждый на свою черную клетку, то они займут 12 клеток, а 13-я черная клетка останется свободной. Если бы исходный квадрат имел размеры 6×6, то могло получиться так, что в каждой клетке будет снова сидеть ровно один жук (например, если жуки, сидящие в столбцах с нечетными номерами, переползут на соседнюю справа клетку, а жуки, сидящие в столбцах с четными номерами, переползут на соседнюю слева клетку, то жуки разбиваются на пары и каждая пара меняется местами).

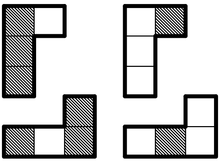
7.4. *Решение.* На такие фигурки разрезать квадрат нельзя. Для доказательства раскрасим клетки квадрата в два цвета (черный и белый) в шахматном порядке. Черных и белых клеток получилось поровну, по 8 штук. Как ни укладывай квадратик, столбик и зигзаг, в них будет по две белые и две черные клетки. А пьедестал будет содержать 3 черные и 1 белую клетку или 3 белые и 1 черную клетки (рис. 153). Итак, чтобы разрезать квадрат на такие фигурки, нам нужно 9 черных клеток и 7 белых (или 7 черных и 9 белых), но у нас черных и белых клеток поровну, значит, такое разрезание невозможно.



Б) В)

Рис. 153

7.5. *Решение.* Клетки квадрата раскрасим в два цвета (черный и белый) в шахматном порядке. Если этот квадрат можно разрезать на такие фигуры, то таких фигур 25, причем каждая содержит либо 3 белых и 1 черную клетки (такие фигурки изображены на рис. 153 (а), пусть их m штук), либо 3 черных и 1 белую клетки (такие фигурки изображены на рис. 153 (б), пусть их n штук). Тогда $3m + n = 50$ (число белых клеток), $3n + m = 50$ (число черных клеток), отсюда $m = n$, поэтому $25 = m + n = 2n$. Но этого не может быть, так как число 25 нечетно.



Б) В)

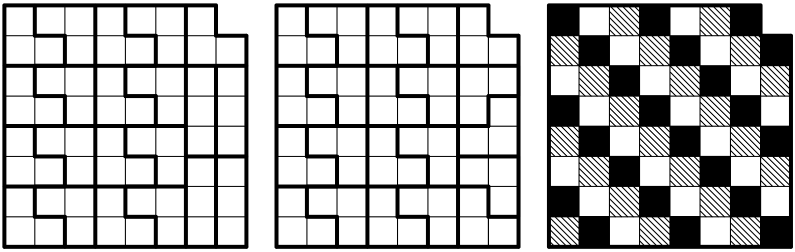
Рис. 154

Урок 7.2

7.6. *Решение.* Клетки квадрата раскрасим в два цвета (черный и белый) столбиками через один. Если этот квадрат можно разрезать на такие фигуры, то таких фигур 25. Причем каждая содержит либо 3 белых и 1 черную клетки (такие фигурки изображены на рис. 154 (а), пусть таких фигур m штук), либо 3 черных и 1 белую клетки (фигурки, изображенные на рисунке 151 (б), пусть таких фигурок n штук). Тогда $3m + n = 50$ (число белых клеток), $3n + m = 50$ (число черных клеток), отсюда $m = n$, поэтому $25 = m + n = 2n$. Но этого не может быть, так как число 25 нечетно.

7.7. *Ответ.* а) Да — см. рис. 155 (а); б) да — см. рис. 155 (б); в) нет.

Решение (в). Раскрасим клетки квадрата в три цвета, как показано на рис. 155 (в). Пластинка 1×3 закрывает по одной клетке каждого цвета. Если бы покрытие было возможно, то на рисунке была бы 21 черная клетка, 21 серая и 21 белая. Но черных клеток 22. Следовательно, покрытие невозможно.



Б) В) Ч)

Рис. 155

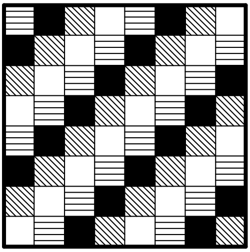


Рис. 156

7.8. *Решение.* Для доказательства раскрасим квадрат 8×8 в четыре цвета, как на рис. 156. Как ни укладывай полоску 1×4, она занимает по одной клетке каждого цвета. А плитка 2×2 непременно закрывает две клетки одного и того же цвета и один цвет «пропускает» (то есть клетки этого цвета в ней вообще нет). Поэтому в покрытии квадрата 8×8 плитками и полосками замена одной плитки на полоску (или наоборот, полоски на плитку) невозможна.

7.9. *Ответ.* Не удастся. *Решение.* Для доказательства разобьем дно коробки на 36 клеток, но красить будем не цветами, а числами, точнее остатками от деления целых чисел на 3 (0, 1, 2) (рис. 157). Как ни укладывай полоску, сумма чисел в ней кратна 3. Сумма всех чисел в квадрате тоже кратна 3. Если бы 11 полосок и одну букву «Г» можно было бы уложить в коробку, то числа внутри «Г» в сумме давали бы число, кратное 3. Но букву «Г» так уложить нельзя.

0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2

Рис. 157

7.10. *Решение.* Раскрасим некоторые клетки, как показано на рис. 158. Любой прямоугольник, состоящий из трех клеток, содержит ровно одну закрашенную клетку. Прямоугольников должно быть 20, а закрашенных клеток — 21. Противоречие.

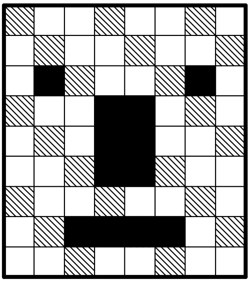


Рис. 158

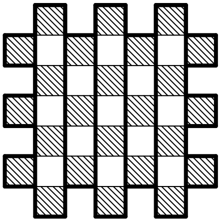


Рис. 159

Урок 7.3

7.11. *Ответ.* На 11. *Решение.* Раскрасим клетки прямоугольника в черный и белый цвет в шахматном порядке. Разность числа черных и числа белых клеток в нем не более 1. Значит, и в фигуре, составленной из k таких прямоугольников, эта разность не более k. У нашей фигуры разность равна 11, то есть число прямоугольников не менее 11. Сделать 11 можно: разрезать фигуру по всем вертикалям (см. рис. 159).

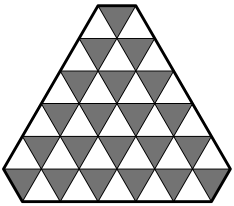
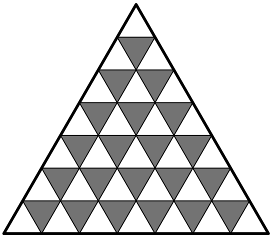


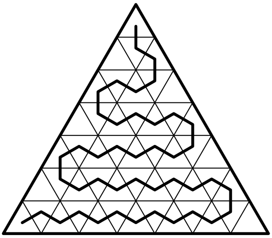
Рис. 160

7.12. *Решение.* Раскрасим фигуру так, как изображено на рис. 160. Если разрезание возможно, то в куске будет два треугольника — черный и белый (всего их 46), то есть черных и белых треугольников должно быть поровну. Но на рисунке черных треугольников 21, а белых — 25, следовательно, требуемое разрезание невозможно.

7.13. *Решение.* Раскрасим треугольники, из которых состоит фигура, в два цвета: черный и белый (как показано на рис. 161 (а). Из «черного» зала (треугольника черного цвета) можно попасть только в «белый» зал (треугольник белого цвета). А из «белого» зала можно попасть только в «черный» зал. «Черных» залов на рисунке 21, а «белых» — 28. Поэтому, чтобы обойти наибольшее количество залов, путнику нужно начинать обход с «белого» зала, затем идти в «черный», затем опять в «белый» и т. д., пока он не зайдет в последний 21 «черный» зал, из него он может пройти в «белый» зал (он 22 по счету), а уже 22 «черного» зала нет. Поэтому наибольшее количество залов, которое удастся обойти путнику — 43. Причем останутся 6 «белых» залов, в которые он не зашел. Один из вариантов обхода залов изображен на рис. 161 (б).



Б)



В)

Рис. 161

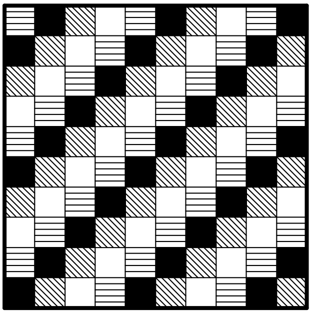


Рис. 162

7.14. *Ответ.* Нет. *Решение.* Раскрасим клетки доски в 4 цвета, как на рис. 162. Каждая плитка займет по одной клетке каждого цвета. Если замощение возможно, то клеток каждого цвета должно быть поровну. Но черных клеток 26, а не 25 (а белых клеток — 24). Поэтому замощение невозможно.

7.15. *Решение.* а) Площадь прямоугольника mn делится на простое число 5, поэтому хотя бы один из сомножителей (m или n) делится на 5. б) Как в пункте а), получим, что m (или n) делится на 3. Если оно же делится и на 2, то все доказано. Пусть m кратно 3 (но нечетно), n кратно 2. Раскрасим прямоугольник в 6 разных цветов (1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й, 6-й, как на рис. 163). Пластинка 1×6 заберет по одной клетке каждого цвета. Если n не делится на 3, то клеток шести разных цветов будет не поровну, и покрытие полосками будет невозможно. Аналогичное решение — у задачи 7.8 (в).

m

n

1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2	3	4	5

Рис. 163

1	2	4
3	5	1
2	4	3

Рис. 164

10	1	3	5
2	1	4	4
8	1	7	6
9	9	7	11

Рис. 165

§8. Задачи с раскраской в условии

Урок 8.1

8.1. *Решение.* В задаче требуется, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону. Пусть наибольшее число цветов — n. Тогда число таких пар цветов $\frac{n\,(n-1)}{2}$. (Первую клетку можно выбрать n способами, а вторую клетку, имеющую с первой общую сторону, уже $(n-1)$ способами, так как один цвет уже занят. Но одну и ту же пару мы посчитали дважды, поэтому число таких пар $\frac{n\,(n-1)}{2}$). Так как отрезков, по которым соседствуют две клетки, всего 12, то $\frac{n\,(n-1)}{2} \leqslant 12$. Подставляя в это неравенство различные значения n, приходим к выводу, что наибольшее такое n, удовлетворяющее неравенству, $n = 5$. Следовательно, наибольшее число цветов — 5. Пример смотрите на рис. 164.

8.2. *Ответ.* В одиннадцать цветов, см. рис. 165.

8.3. *Ответ.* Доску можно раскрасить в 16 цветов. Клеток каждого цвета не меньше четырех, так как среди трех клеток всегда найдется «крайняя» (граничащая не более чем с одной из остальных двух). Поэтому цветов не более $64 : 4 = 16$. Пример для 16 цветов: разделим доску на квадраты 2×2 клетки и каждый квадрат выкрасим в свой цвет.

8.4. *Ответ.* Пример см. на рис. 166.

8.5. *Ответ.* Пример требуемой раскраски — на рис. 167.

0	0	0	0	0
×	0	×	0	×
0	×	0	×	×
×	0	×	0	×
0	×	0	×	×

Рис. 166

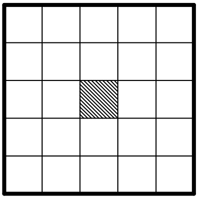


Рис. 167

8.6. *Решение.* 1) Ясно, что число цветов не меньше четырех. Допустим, что четырех цветов достаточно, и приведем это предположение к противоречию. Цвета в первой строке занумеруем (от 1 до 4 слева направо, см. рис. 168 (а)). Рассмотрим цвет 2. Он не может стоять во втором столбце и в первой и третьей клетке второй строки, а значит во второй строке он может стоять только в четвертой клетке. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что в третьей строке он может стоять только в первой клетке, а в четвертой строке он занимает вторую клетку. Из соображений симметрии можно расставить третий цвет: во второй строке он занимает первую клетку, в третьей — четвертую, а в четвертой — вторую (рис. 168 (а). В клетку A мы не можем поставить четвертый цвет, так как он уже есть на большой диагонали, и понятно, что не можем поставить цвета 1, 2, 3. Значит, четырех цветов недостаточно. Как раскрасить квадрат в 5 цветов показано на рис. 168 (б).

2) Ясно, что число цветов не меньше пяти. Попробуем раскрасить квадрат в 5 цветов. Цвета в первой строке занумеруем (от 1 до 5 слева направо, см. рис. 169 (а)). Рассмотрим цвет 3. Будем отмечать все клетки, в которых он не может стоять. Он не может стоять в третьем столбце, во второй клетке второго и четвертого столбца и в третьей клетке первого и второго столбца. Во второй строке он может занимать первую или пятую клетки. Закрасим цветом 3 первую клетку (рассуждения в случае, когда цветом 3 закрашивается пятая клетка аналогичны). Теперь можем отметить, что цвет 3 не может стоять в

остальных клетках первого столбца, в третьей клетке второго столбца, в пятой клетке четвертого столбца. Значит в третьей строке цвет 3 может занимать только четвертую клетку. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что в четвертой строке цвет 3 стоит во второй клетке, а в пятой строке — в пятой клетке (рис. 169 (а)). Теперь можно расставить цвет 5. В четвертой строке он может стоять только в четвертой клетке. Во второй строке он занимает третью, в третьем столбце — первую, а пятом вторую клетки. Проводя аналогичные рассуждения для всех цветов, мы получаем раскраску, представленную на рис. 169 (б).

1	2	3	4
3			2
2			3
А	3	2	

Б)

1	2	3	4
4	5	1	2
2	3	4	5
5	1	2	3

В)

Рис. 168

1	2	3	4	5
3		5		
5			3	
	3		5	
	5			3

Б)

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

В)

Рис. 169

8.7. *Ответ.* Пример см. на рис. 170.

1	1	4	4	1	1
1	1	4	4	1	1
2	2	3	3	2	2
2	2	3	3	2	2
1	1	4	4	1	1
1	1	4	4	1	1

Рис. 170

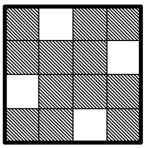
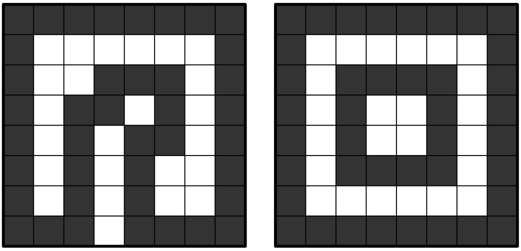


Рис. 171

Урок 8.2

8.8. *Ответ.* См. рис. 171.

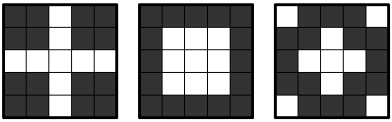
8.9. *Ответ.* Лиса не права. На рис. 172 изображены примеры, когда черных клеток 40. Причем в примере, изображенном на рис. 172 (б), по две черных соседних клетки не только у черных клеток, но и у белых.



Б) В)

Рис. 172

8.10. *Ответ.* Возможный чертеж Ромы смотрите на рис. 173 (а), возможный чертеж Семы — на рис. 173 (б) (могут быть и другие чертежи), а чертеж Томы — на рис. 173 (в).



Б) В) Ч)

Рис. 173

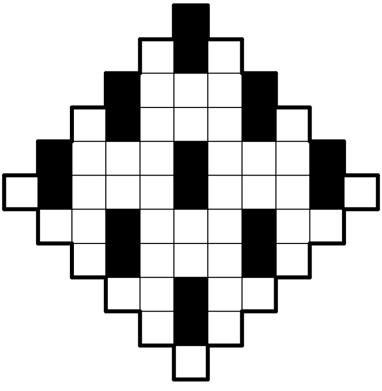


Рис. 174

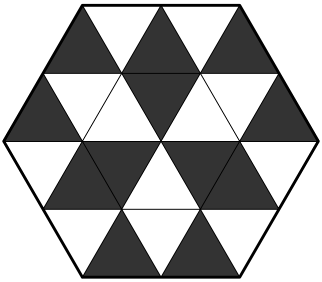


Рис. 175

8.11. *Ответ.* См. рис. 174.

8.12. *Ответ.* См. рис. 175.

Урок 8.3

8.13. *Ответ.* а) 2; б) 2; в) 3 — см. на рис. 176.

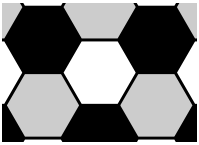


Рис. 176

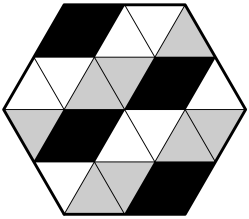


Рис. 177

8.14. *Ответ.* Лиса Алиса не права. Раскраску см. на рис. 177.

8.15. *Решение.* Цветов не меньше четырех, так как у клетки четыре соседа, сама же клетка может быть такого же цвета, как какая-нибудь из ее соседей. Пример с четырьмя цветами изображен на рис. 178.

8.16. *Ответ.* См. рис. 179.

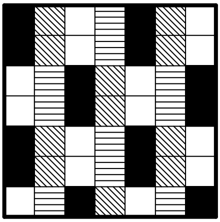


Рис. 178

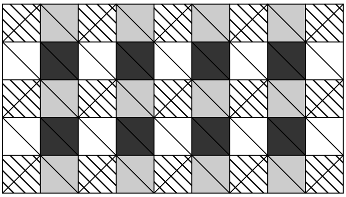


Рис. 179

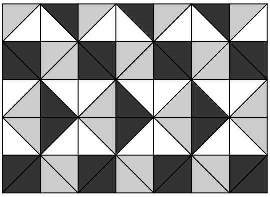


Рис. 180

8.17. *Ответ.* Наименьшее число цветов 3. Пример раскраски на рис. 180.

8.18. *Ответ.* Потребуется 3 цвета. Пример раскраски смотрите на рис. 181.

8.19. *Решение.* Поскольку у каждой клетки 6 соседок, то цветов не менее шести. Однако, если бы две клетки, соседствующие по стороне, были бы одного цвета, то у них нашлась бы общая соседка, а значит у нее эти две соседки были бы одного цвета. Поэтому цветов не менее семи. На рис. 182 указана раскраска, где всего семь цветов.

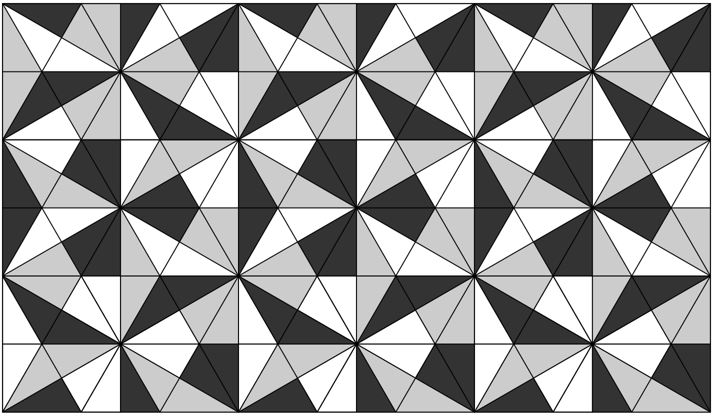


Рис. 181

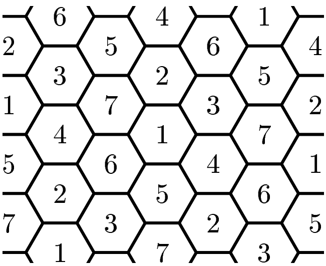


Рис. 182

Урок 8.4

8.20. *Решение.* Легко видеть, что в каждой вершине треугольника сходятся 6 треугольников, поэтому использовано не менее 6 цветов. При этом 6 цветов достаточно. Выделим полоску из треугольников (верхняя полоска на рис. 183). Номера цветов на этой полоске: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (а затем этот набор повторяется еще раз). Следующая полоска (ниже) раскрашена точно так же, но со сдвигом. В результате под 1 стоит 4, под 2 стоит 5, под 3 стоит 6, и т. д. Таким образом можно окрасить все клетки, используя 6 цветов.

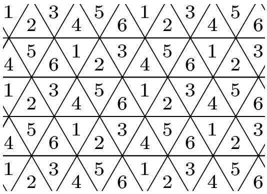
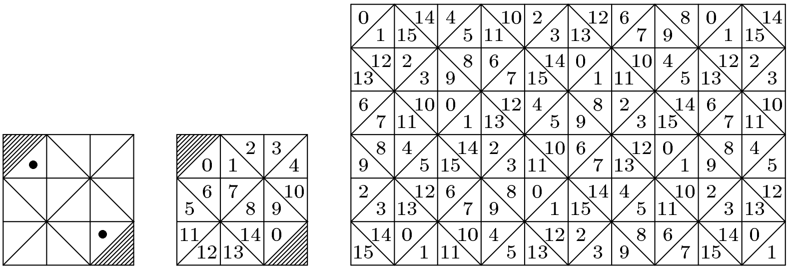


Рис. 183

1	2	3	1	2
4	5	6	4	5
7	8	9	7	8
1	2	3	1	2
4	5	6	4	5

Рис. 184

8.21. *Решение.* Потребуется 9 цветов. У любых двух клеток-соседок есть общая соседка. Поэтому две соседних клетки — разного цвета. У каждой клетки 8 соседок. Поэтому потребуется не менее 9 цветов. Раскраску в 9 цветов см. на рис. 184.



Б) В) Ч)

Рис. 185

8.22. *Решение.* У любых двух клеток-соседок есть общая соседка. Поэтому каждая клетка окрашена иначе, нежели ее соседка. Поскольку у каждой клетки 14 соседок, то требуется не менее 15 цветов. Объясним, почему 15 цветов не хватит. Выделим квадрат из 18 клеток (16 неокрашенных и 2 заштрихованных, см. рис. 185 (а)). Допустим, что возможна окраска в 15 цветов, удовлетворяющая условиям задачи. Тогда какие-то две клетки из 16 неокрашенных имеют один и тот же цвет. Легко проверить, что это могут быть только клетки, помеченные точкой. Вместо раскраски нумеруем клетки числами 0, 1, 2 и т. д. (рис. 185 (б)). Проверяем, что в заштрихованную клетку ни один номер от 0 до 14 поставить нельзя. Поэтому требуется не менее 16 цветов. Пример, когда раскраска в 16 цветов удовлетворяет условиям задачи — на рис. 185 (в).

8.23. *Ответ.* Потребуется 14 цветов. Вначале докажем, что искомое число $k \geqslant 14$, а потом приведем пример раскраски в 14 цветов при выполнении условий задачи.

У каждой клетки 12 соседок, так что $k \geqslant 12$. Любые две соседних клетки имеют общую соседку, поэтому любая клетка окрашена не так, как ее соседка. Поэтому $k \geqslant 13$.

Приведем к противоречию предположение, что $k = 13$. Пусть (см. рис. 186 (а)) какая-то клетка окрашена цветом 0, а ее соседки — цветами от 1 до 12. Эти 13 клеток составляют центральный шестиугольник (ЦШ), а 24 клетки, каждая из которых не лежит в ЦШ, но имеет с ним хотя бы одну общую вершину, составляет пояс (П). Клетки пояса, где может быть цвет 1, обозначены буквой Е (таких клеток 5). Какие-либо две клетки пояса окрашены одним и тем же цветом. Если это цвет 1, то среди клеток с меткой Е двум клеткам цвета 1 нет места. Поэтому в клетках пояса цвет 1 (и каждый из цветов 1, 5, 9) встречается не более одного раза. Обозначим буквой С те клетки пояса, которые могут быть окрашены цветом 4. Таких клеток 10. Если даже цвет 4 занимает две крайние клетки с меткой С, то для третьей клетки цвета 4 на поясе нет места. Поэтому в клетках пояса цвет 4 (и каждый из цветов 2, 4, 6, 8, 10, 12) встречается не более двух раз. Поэтому на долю цветов 3, 7, 11 приходится не менее девяти клеток пояса, то есть какой-то из этих цветов встречается в клетках пояса не менее трех раз. Пусть это цвет 3. Обозначим буквой Т те клетки пояса, где может быть цвет 3. Таких клеток 13. Понятно, что для четырех клеток цвета 3 на поясе нет места. Поэтому цвет 3 в клетках пояса встречается ровно три раза.

Каждый из цветов 3, 7, 11 встречается в клетках пояса ровно три раза, каждый из цветов 2, 4, 6, 8, 10, 12 — ровно два раза, каждый из цветов 1, 5, 9 — ровно один раз.

Итак, ровно три клетки пояса окрашены цветом 3. Тогда это одна из клеток с меткой $*$ и одна из клеток с меткой $\#$, а также непременно клетка X.

Выделим участок рисунка с клетками 3 и X (рис. 186 (б)). Любую пару клеток плоскости, расположенных так же, можно накрыть рисунком, аналогичным рис. 186 (а). Таким образом, любые две клетки с таким взаимным расположением окрашены одинаково.

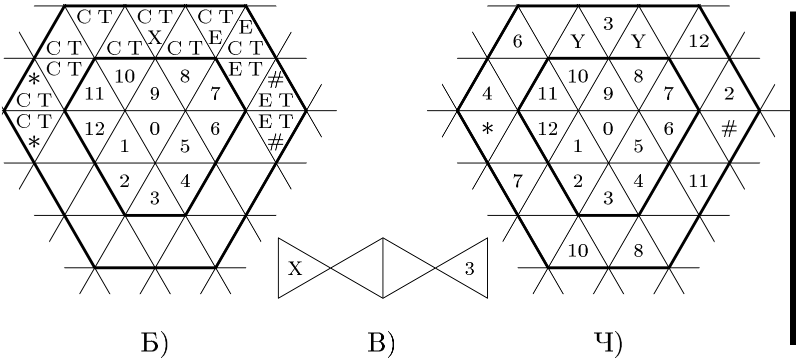


Рис. 186

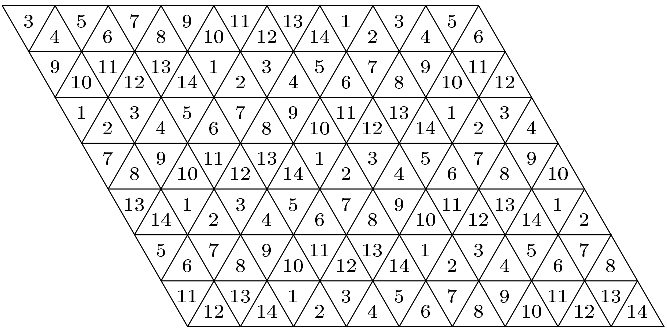


Рис. 187

Это соображение позволяет точно назвать цвет некоторых клеток пояса (см. рис. 186 (в)). Поэтому на рис. 186 (в) в клетках $*$ и $\#$ стоит цвет 3 (соседние с ними клетки, где разрешалось ставить цвет 3, заняты цветом 2 и 4). Но тогда цвет 3 стоит в клетках Y, а это противоречит условию задачи.

Итак, $k \geqslant 14$. На рис. 187 показана раскраска в 14 цветов.

8.24. *Ответ.* а) Рассмотрим клетку, обозначенную 1, покрасим ее в цвет 1 (рис. 188 (а)). У этой клетки 9 соседок, все они должны быть покрашены в разные цвета. Любые две соседних клетки имеют общую соседку, поэтому любая клетка окрашена не так, как ее соседка. Поэтому для окраски плоскости таким образом необходимо не меньше 10 цветов. Докажем, что 10 цветов недостаточно. Раскрасим соседки клетки 1 в другие 9 цветов, см. рис. 188 (а). Клетки, обозначенные $(*)$ и $(**)$, можно закрасить 7 или 8 цветом, но неизвестно, какую клетку каким цветом закрашивать. Аналогично, клетки, обозначенные $(+)$ и $(++)$, можно закрасить или 9 или 10 цветом, но неизвестно, какую клетку каким цветом.

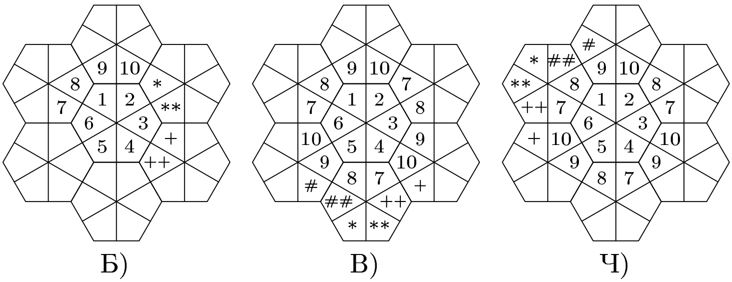


Рис. 188

1) Сначала рассмотрим раскраску этих клеток, которая показана на рис. 188 (б) (по часовой стрелке). Теперь рассмотрим клетки, которые обозначены на рисунке $(\#)$, $(\#\#)$, $(+)$, $(++)$, $(*)$, $(**)$. Клетку $(\#)$ нельзя закрасить цветами 7, 6, 5, 4, 8, 9, 10, но можно закрасить цветами 1, 2, 3. Клетку $(\#\#)$ нельзя закрасить цветами 7, 6, 5, 4, 8, 9, 10, но можно закрасить цветами 1, 2, 3. Клетку $(+)$ нельзя закрасить цветами 7, 10, 5, 4, 8, 9, 3, но можно закрасить цветами 1, 2, 6. Клетку $(++)$ нельзя закрасить цветами 7, 10, 5, 4, 8, 9, 3, но можно закрасить

цветами 1, 2, 6. Клетку (∗) нельзя закрасить цветами 7, 6, 5, 4, 8, 9, 10, но можно закрасить цветами 1, 2, 3, 6. Клетку (∗∗) нельзя закрасить цветами 7, 6, 5, 4, 8, 9, 10, но можно закрасить цветами 1, 2, 3, 6. У нас есть свободных 4 цвета и нужно закрасить 6 клеток, причем нет общих соседок только у клеток (#) и (+). Закрасим их одним цветом. Тогда останется 4 клетки и 3 цвета, поэтому как бы мы ни закрашивали их, все равно две соседние клетки будут закрашены одним цветом. А этого нельзя допустить по условию.

2) Поменяем цвета 7, 8 и 9, 10 местами, как показано на рис. 188 (в). Тогда для раскраски тех же 6 клеток, которые на рис. 188 (б) были обозначены (#), (##), (+), (++), (∗), (∗∗), у нас будет в наличии уже 5 цветов (добавится цвет 10). Тогда эти клетки можно закрасить так, что у каждой клетки все соседки будут разных цветов. Но тогда клетки, обозначенные на рис. 188 (в) символами (#), (##), (+), (++), (∗), (∗∗), нельзя закрасить так, как требуется в условии (доказательство, аналогичное случаю 1).

б) См. рис. 189. Цвета повторяются в указанных стрелками направлениях через три маленьких шестиугольника.

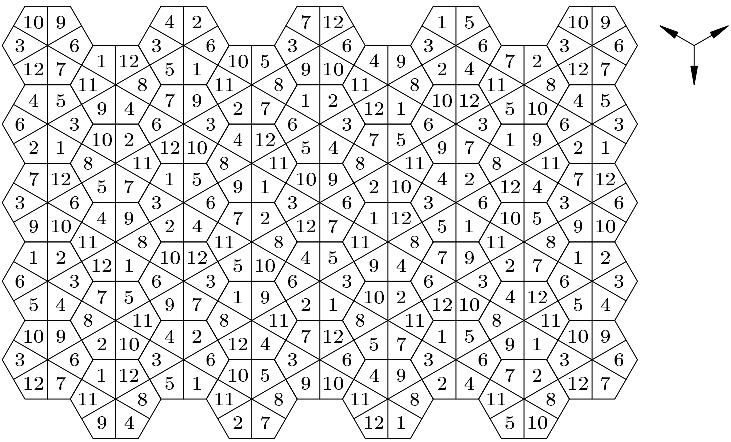
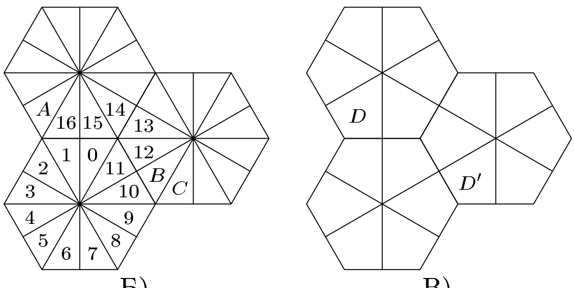


Рис. 189

8.25. *Решение.* а) Пусть k — наименьшее число цветов, удовлетворяющее условиям задачи. У любых двух клеток-соседок есть общая соседка. Поэтому каждая клетка окрашена иначе, нежели ее соседка.

Поскольку у каждой клетки 16 соседок, то $k \geqslant 17$. Выделим клетку, окрашенную цветом с номером 0, и всех ее соседок (у них номера цветов от 1 до 16), см. рис. 190 (а). Клетка A не может быть окрашена ни в один из цветов с номерами от 1 до 16. Поэтому $k \geqslant 18$, а в клетке A цвет номер 17. Предположим, что $k = 18$, и приведем это предположение к противоречию. В клетках B и C могут стоять только цвета 16 и 17, но неизвестно, в какой из этих клеток цвет 16, а в какой 17. Две соседние клетки, имеющие общую гипотенузу, объединим в четырехугольник с углами 120°, 90°, 60°, 90° (дельтоид). Считаем, что дельтоид окрашен парой цветов. Так, дельтоид D, составленный из клеток B и C, имеет окраску (16, 17) или, в более простых обозначениях, 16+17. На рис. 190 (б) показано разбиение плоскости на дельтоиды. Мы показали (предположив, что $k = 18$ в условиях задачи), что любые два дельтоида, расположенные также, как дельтоиды D и D' на рис. 190 (б), окрашены одинаково. Следовательно, при окраске дельтоидов использованы только такие пары цветов: 1+2, 3+4, 5+6, 7+8, 9+10, 0+11, 12+13, 14+15, 16+17 (девять вариантов раскраски дельтоидов). Понятно, что любые два различных дельтоида, имеющие хотя бы одну общую точку, окрашены по-разному. Назвав такие дельтоиды соседними, получаем, что любые два соседних дельтоида окрашены по-разному, а у каждого дельтоида все его соседи имеют разную окраску. Поскольку у каждого дельтоида имеется 9 дельтоидов-соседей, то потребуется не менее 10 вариантов окраски дельтоидов. Противоречие. Итак $k \geqslant 19$, и пункт а) доказан.



Б) В)

Рис. 190

б) Вариант раскраски в 24 цвета получится, если на рис. 189 (задача 8.24) каждый дельтоид разделить на два прямоугольных треугольника и покрасить каждый треугольник своим цветом.

Урок 8.5

8.26. *Решение.* Картинка симметрична относительно оси AB (с заменой красного цвета на черный и наоборот), смотрите рис. 191. Поэтому можно считать центральную клетку красной. Будем предполагать, что одноцветных дорожек, описанных в условии задачи, нет, и приведем это предположение к противоречию.

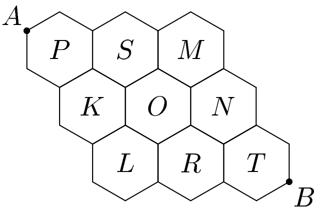


Рис. 191

Если из клеток K, L хотя бы одна красная, то ни одна из клеток M, N не может быть красной (иначе получим красную дорожку). Клетки M, N — черные, тогда R, T — красные (иначе получим черную дорожку MNR или MNT). Но тогда получим красную дорожку LRT (если L — красная) или $KORT$ (если K — красная). Противоречие.

Пусть обе клетки K, L черные. Тогда клетка P должна быть красной, иначе получим черную дорожку PKL. Аналогично, клетка S — красная. Тогда M — обязательно черная. Клетка N также черная (иначе $PSON$ — красная дорожка). Если клетка N черная, то обе клетки R, T красные, иначе получим черную дорожку. Но тогда получаем красную дорожку с началом в клетке S. Противоречие.

Итак, непременно есть дорожка из плиток одного цвета, соединяющая два отрезка того же цвета на противоположных сторонах фигуры.

Л		У		Л		У	
	Ю		В		Ю		В
У		Л		У		Л	
	В		Ю		В		Ю
Л		У		Л		У	
	Ю		В		Ю		В
У		Л		У		Л	
	В		Ю		В		Ю

Рис. 192

8.27. *Решение.* У фигуры из предыдущей задачи и данной фигуры одинаковые топологические свойства (у каждой клетки шесть соседок). Чтобы выиграть, Коля первым ходом закрашивает центральную клетку.

8.28. *Ответ.* Как бы ни лежали доминошки, отмеченные клетки окрасим так, как указано на рис. 192 (цвета помечены буквами: к — красный, б — белый, с — синий, ч — черный). Вторую клетку доминошки окрасим в тот же цвет, что и первую.

8.29. *Решение.* В каждой из 11 строк не менее 8 белых клеток. Общее число белых клеток не менее 88. Если бы в каждом столбце было не более 5 белых клеток (всего столбцов 15), то общее число белых клеток было бы не более 75. Противоречие. Поэтому хотя бы в одном столбце не менее 6 белых клеток (а всего в столбце 11 клеток), значит, белых клеток больше, чем черных.

8.30. *Решение.* Разобьем квадрат на квадратики 2×2. Либо все четыре клетки такого квадратика одного цвета, либо две его клетки белые, а две черные. В каждом квадратике число черных клеток четно, а потому и общее число черных клеток четно.

8.31. *Решение.* В любой полоске 1×5 не менее трех черных клеток. Действительно, поскольку в каждой полоске 1×2 есть хотя бы одна черная клетка, то если в полоске 1×5 менее трех черных клеток, то их две (они соседние с центральной). Но тогда в полоске 1×6, содержащей рассмотренную полоску 1×5, нет двух черных клеток подряд. Итак во всем квадрате не менее 6000 черных клеток (3/5) общего количества). Пример, где ровно 6000 черных клеток: замостите исходный квадрат плитками 5×5 клеток, раскраску которых смотрите на рис. 193.

8.32. *Решение.* При каждой из восьми вершин куба по три клетки, и все они разных цветов. Это и дает 8 клеток каждого цвета. На рис. 194 изображен пример требуемой раскраски.

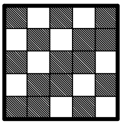


Рис. 193

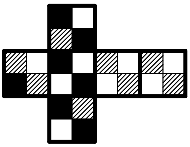


Рис. 194

Урок 8.6

8.33. *Ответ.* Наибольшее число красных ребер равно 3. *Решение.* Двенадцать ребер — это три четверки ребер с одним направлением. Поэтому более трех красных ребер быть не может. Пример, когда красных ребер три, легко найти (на кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ это ребра B, B_1C_1, DD_1).

8.34. *Ответ.* Наибольшее число красных ребер — 3. *Решение*: Возьмем четыре грани (ABA_1B_1, ADA_1D_1, BB_1C_1, DC_1D_1). Все ребра принадлежат объединению этих граней. Если есть два красных параллельных ребра, то их можно считать (с точностью до обозначений) ребрами AA_1, C_1. Тогда третьему красному ребру нет места. Значит, параллельных красных ребер нет, а все красные ребра скрещиваются. Максимальное количество таких ребер — три.

8.35. *Ответ.* Наибольшее число красных ребер — 8. *Решение.* Вершин всего восемь, из каждой не более двух красных ребер, итого не более 16 красных ребер (но при этом каждое ребро посчитано дважды). Итак, всего не более восьми красных ребер. Пример, когда красных ребер ровно 8, легко построить (на кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ это ребра AB, AD, BC, C_1, DD_1, A_1B_1, A_1D_1, B_1C_1).

8.36. *Ответ.* Наибольшее число красных ребер — 4. Пример, когда красных ребер ровно четыре: AB, CD, A_1B_1, C_1D_1 или AB, CD, A_1C_1, B_1D_1.

8.37. *Ответ.* Наибольшее число красных ребер равно 6. *Решение.* В каждой вершине (а их шесть) сходятся не менее двух черных ребер. Поэтому число черных ребер не менее $2\cdot 6$, при этом каждое посчитано дважды. Поэтому черных ребер не менее шести, а красных не более шести. Приведем пример, когда красных ребер ровно шесть. Пусть октаэдр имеет две параллельные грани ABC, $A_1B_1C_1$. Стороны этих треугольников сделаем красными, остальные ребра черными.

8.38. *Ответ.* Наибольшее число красных ребер — 9. Возьмите (в обозначениях к решению задачи 8.37) черные ребра AB, B_1C_1, A_1C, остальные — красные.

8.39. *Решение.* а) В каждой из шести вершин сходится не более двух красных ребер. Итого 12 красных ребер, но каждое посчитано дважды, так как соединяет две вершины. А $12:2=6$ (это ответ). Пример, когда красных ребер ровно шесть, см. на рис. 195. Красный цвет обозначен цифрой 1, черный — цифрой 2, синий — 3.

б) Наименьшее число красных ребер — 3. Оценка снизу получается аналогично оценке из задачи 8.37, но теперь красный и черный цвета надо поменять местами.

8.40. *Решение.* а) Понятно, что красок понадобится не менее трех, так как в каждой вершине куба сходится по три ребра. Раскраску в три цвета см. на рис. 196.

б) Понятно, что красок понадобится не менее трех, так как в каждой вершине тетраэдра сходится по три ребра. Раскраску в три цвета см. на рис. 197.

в) Понятно, что красок понадобится не менее четырех, так как в каждой вершине октаэдра сходится по четыре ребра. Раскраску в четыре цвета см. на рис. 198.

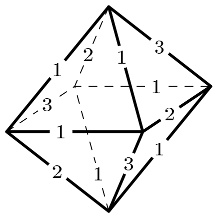


Рис. 195

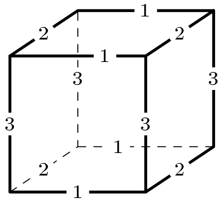


Рис. 196

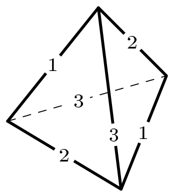


Рис. 197

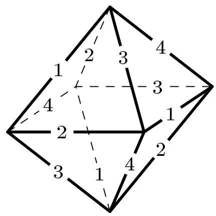
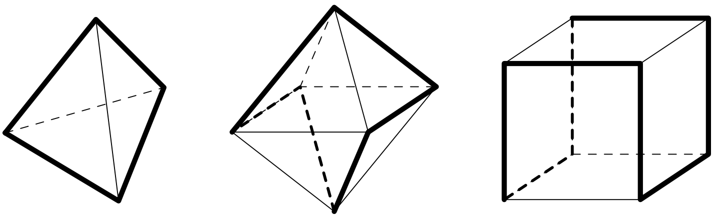


Рис. 198

8.41. *Решение.* а) Каждая грань — треугольник. Если все стороны такого треугольника красные, то длина ломаной 3, а ломаная плоская. Если ломаная не лежит в одной плоскости, то у каждой грани не более двух красных ребер. Так как граней 4, то красных ребер не более 8, но при этом каждое ребро посчитано дважды (так как принадлежит двум граням). Итак, длина замкнутой ломаной — не более 4. Пример, когда длина ломаной ровно 4, приведен на рис. 199 (а).

б) Расположим октаэдр так, что четыре вершины лежат в горизонтальной плоскости (плоскость экватора), еще две вершины — это северный и южный полюс. Поскольку ломаная замкнутая, то число красных наклонных ребер выше экватора четно и число красных ребер ниже экватора четно. Если красных ребер на экваторе 1 или 3 (а свободных концов у них 2), то наклонных красных ребер 2 (выше или ниже экватора). Если на экваторе два параллельных ребра, то может быть два красных ребра выше экватора и два ниже. Длина ломаной равна 6 (рис. 199 (б)). в) *Ответ*: 8 (рис. 199 (в)).



Б) В) Ч)

Рис. 199

Урок 8.7

8.42. *Ответ.* 18. *Решение.* В каждой из 12 вершин сходятся не более трех красных ребер. Итого 36, но при этом каждое ребро посчитано дважды (оно соединяет две вершины). Поэтому возможно не более 18 красных ребер. Пример, когда красных ребер ровно 18, приведен на рис. 200 (красные ребра показаны жирными линиями).

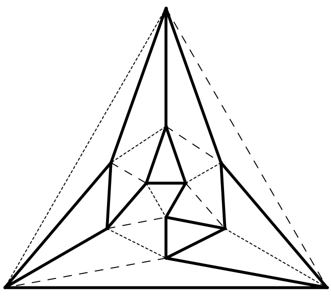


Рис. 200

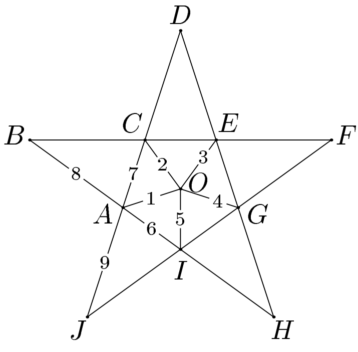


Рис. 201

8.43. *Ответ.* 15. *Решение.* а) Легко видеть, что любые два соседних ребра разных цветов. У каждого ребра 8 соседей. Итого не менее девяти цветов. Окрасив ребро OA (рис. 201) цветом 1, раскрасим всех его соседей. Ясно, что ребро EC не может быть окрашено ни в один из этих девяти цветов. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что уже окрашенные ребра и ребра EC, BC, CD, JI, IH, IG требуют не менее 15 цветов. Центрально симметричные ребра окрашены одинаково.

б) У каждого ребра (пусть A) соседи (их 4) разных цветов. В вершине сходятся 3 ребра, так что любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены по-разному. Итак, искомое число цветов не менее 5 (цвет ребра A и еще 4 цвета его соседей). Покажем на примере, что пяти цветов достаточно — см. рис. 202.

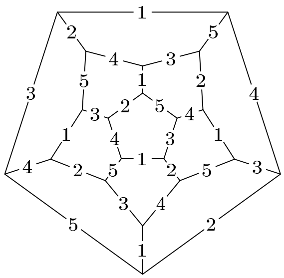


Рис. 202

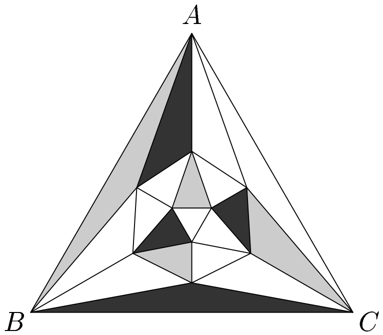


Рис. 203

8.44. *Ответ* на первый вопрос: 12. В каждой из 12 вершин сходится не более трех белых граней, итого 36. При этом каждая грань посчитана трижды, так как соединяет три вершины. Всего не более 12 белых граней. На рис. 203 приведен пример, когда белых граней ровно 12 (невидимая грань ABC белая). *Ответ* на второй вопрос: 4.

8.45. *Ответ* на первый вопрос: 8. В каждой вершине сходятся не более двух красных граней (а вершин 12). Итого не более 24 граней, причем каждая грань соединяет 3 вершины, так что посчитана трижды. Поэтому всего не более 8 красных граней. Пример, когда красных граней как раз 8, приведен на рис. 204. (Красные грани обозначены серым цветом, синие — штриховкой. Невидимая грань ABC черная). *Ответ* на второй вопрос: 4.

8.46. *Ответ.* 6. *Решение.* Рассмотрим одну красную грань и пять ее «соседок» (рис. 205, эскиз вида додекаэдра сверху). Если из пяти «соседок» две подряд красные, то в одной вершине сходятся три красных грани вопреки условию. Следовательно, не менее трех из пяти «соседок» — черные грани. И не менее трех черных граней на виде снизу. Итого не менее 6 черных и не более 6 красных граней. Пример, когда красных граней ровно 6, приведен на рис. 206 (красные грани изображены серым цветом; невидимая грань $ABCDE$ красная).

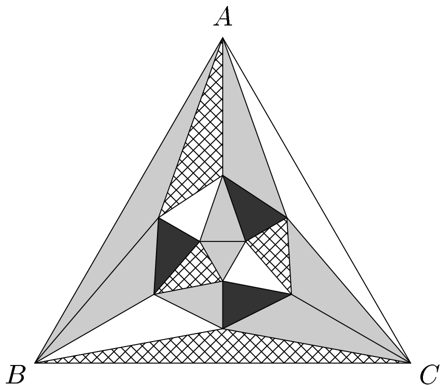


Рис. 204

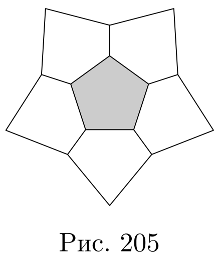


Рис. 205

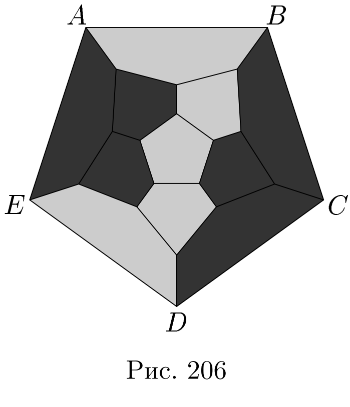


Рис. 206

8.47. *Ответ.* 12. *Решение.* В каждой из 12 вершин сходится не более трех красных граней. Итого 36 красных граней, причем каждая посчитана трижды; а $36:3=12$. Пример, когда красных граней как раз 12, приведен на рис. 207 (красные грани изображены серым цветом; невидимая грань ABC окрашена в черный цвет).

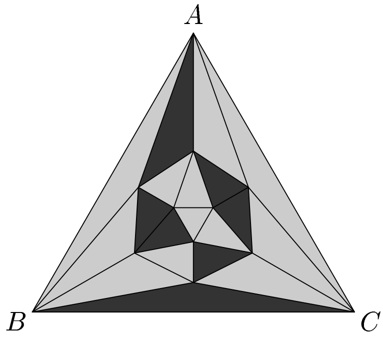


Рис. 207

8.48. а) *Указание.* Каждая вершина принадлежит, самое большее, 4 красным граням. Поэтому черных граней не менее четырех. *Ответ.* Наибольшее число красных граней — 12 (рис. 208; красные грани изображены серым цветом; невидимая грань ABC тоже красная).

б) *Ответ.* 6 (рис. 209; красные грани изображены серым цветом; невидимая грань $ABCDE$ тоже красная).

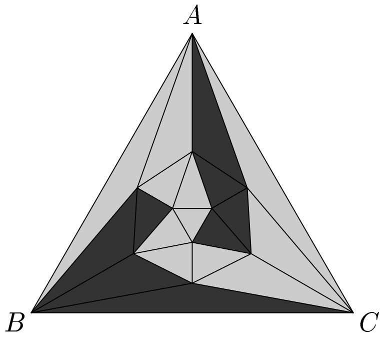


Рис. 208

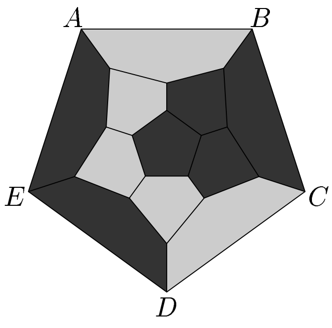


Рис. 209

8.49. *Указание.* Многогранники додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу. Поэтому достаточно решить задачу б). Пять граней икосаэдра имеют общую вершину. Поскольку число 5 нечетно, то двух цветов не хватит. *Ответ*: 3. Пример приведен на рис. 210 (невидимая грань ABC окрашена в черный цвет).

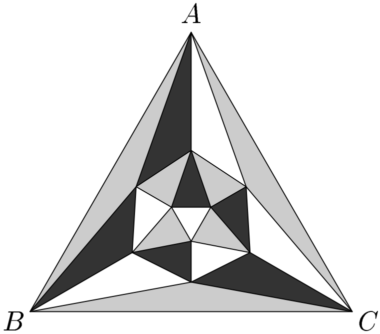


Рис. 210

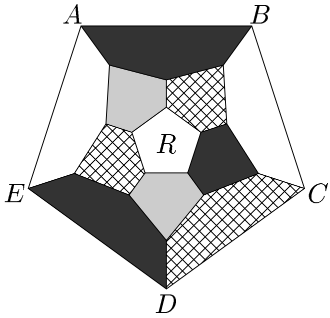


Рис. 211

8.50. *Указание*. Многогранники додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу. Поэтому достаточно решить задачу б). У каждой грани (пусть R) имеется 5 смежных граней. Число 5 нечетно, то есть для окраски этих пяти граней двух цветов не хватит, надо не менее трех цветов. Ни один из этих трех цветов нельзя использовать для окраски грани R. Поэтому общее число цветов не менее четырех. *Ответ*: 4. Пример на рис. 211 (невидимая грань $ABCDE$ окрашена в серый цвет).

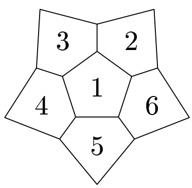


Рис. 212

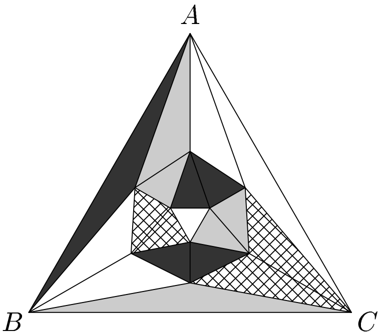


Рис. 213

8.51. *Указание.* Многогранники додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу. Поэтому достаточно решить задачу а).

Легко показать, что любые две смежные грани окрашены по-разному. У данной грани (пусть A) имеется 5 смежных граней, итого 5 цветов, причем ни в один из них грань A не может быть окрашена. Итак, искомое число — не менее 6. Покажем на примере, что шести цветов достаточно. *Ответ.* 6. На рис. 212 приведен вид додекаэдра сверху (эскиз). При этом окрашены одинаково любые две грани, симметричные относительно центра додекаэдра.

8.52. *Указание.* В силу двойственности между додекаэдром и икосаэдром достаточно решить задачу а). У каждой грани икосаэдра имеется 3 смежных грани, так что потребуется не менее трех цветов. Начиная раскрашивать в три цвета, быстро обнаруживаем, что трех цветов не хватит. *Ответ.* 4. Пример приведен на рис. 213 (невидимая грань ABC окрашена в серый цвет).

Раздел 2
Факультативные задачи

§9. Превращение фигур

Урок 9.1

9.1. *Ответ.* Нет, не хвастает (см. рис. 214).

9.2. *Ответ.* Нет, не хвастает (см. рис. 215).

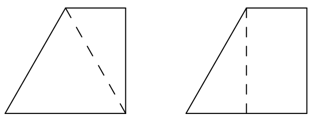


Рис. 214

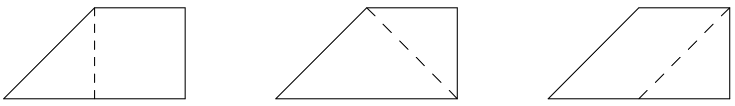
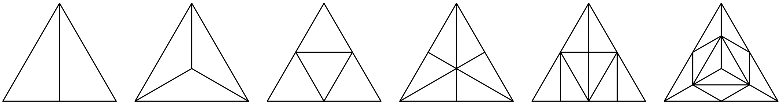


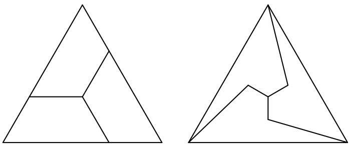
Рис. 215

9.3. *Решение.* а) Проведем высоту (она же медиана, она же биссектриса. б) Общая вершина трех треугольников является центром описанной и вписанной окружности. в) Проведены три средних линии. г) Проведены все четыре высоты. д) Треугольник поделен на четыре части, как в случае (в), а потом каждый треугольник поделили еще на две части. е) Треугольник поделили на три части, как в (б), а потом каждый из трех треугольников поделили на четыре равных части, проведя три средних линии.



Б) В) Ч) З) Д) Е)

Рис. 216



Б) В)

Рис. 217

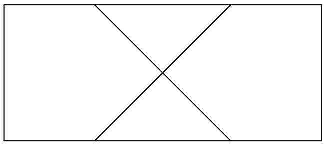


Рис. 218

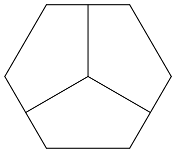


Рис. 219

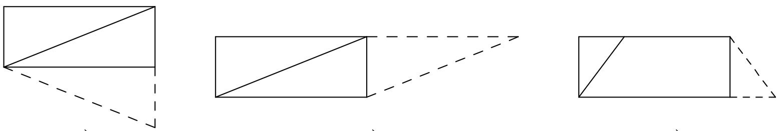
9.4. *Ответ.* См. рис. 217.

9.5. *Ответ.* См. рис. 218.

9.6. *Ответ.* См. рис. 219.

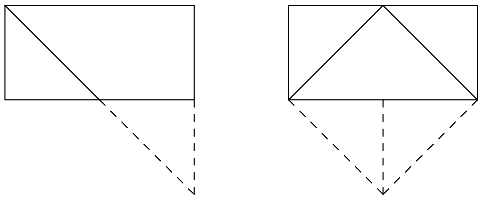
9.7. *Ответ.* См. рис. 220. В случаях а) и б) прямоугольник разрезается одинаково, а части 1 и 2 складываются по-разному.

9.8. *Ответ.* См. рис. 221.



Б) В) Ч)

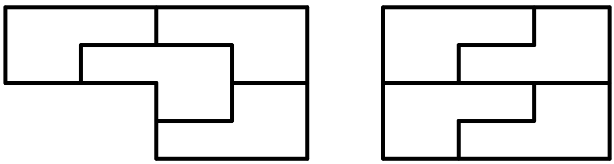
Рис. 220



Б) В)

Рис. 221

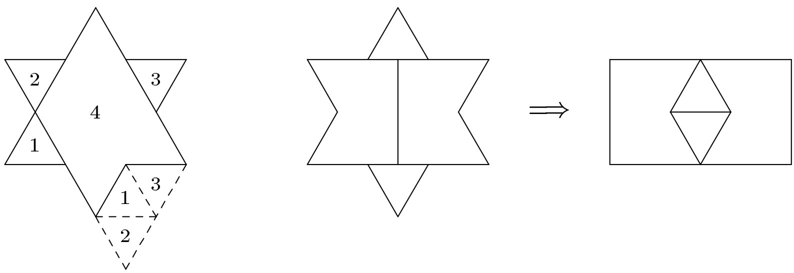
9.9. *Ответ.* См. рис. 222.



Б) В)

Рис. 222

9.10. *Ответ.* Два варианта решения см. на рис. 223.



Б) В)

Рис. 223

9.11. *Ответ.* На 4 части, см. рис. 224.

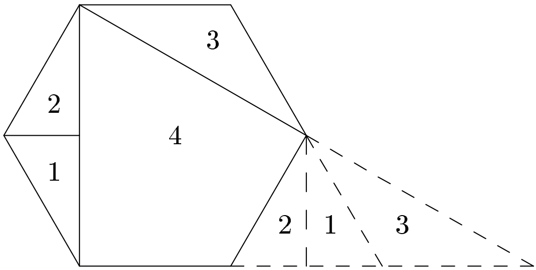


Рис. 224

Урок 9.2

9.12. *Ответ.* См. рис. 225.

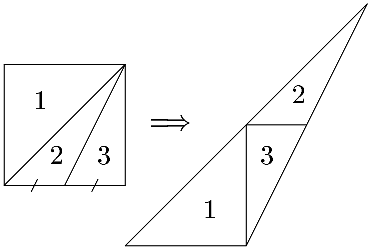


Рис. 225

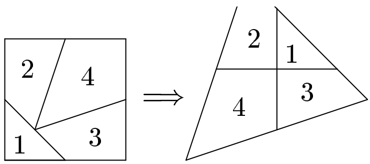


Рис. 226

9.13. *Решение.* По условию $AP = BP = BN = CN = CM = DM = DQ = AQ$; углы A, B, C, D — прямые;

$$\angle APQ + \angle BPL = 180^\circ, \quad \angle AQP + \angle DQL = 180^\circ,$$
$$\angle LNB + \angle LNC = 180^\circ, \quad \angle LMD + \angle LMC = 180^\circ.$$

Поэтому четыре детали составляют равнобедренный треугольник (рис. 226).

9.14. *Ответ.* См. рис. 227.

9.15. *Ответ.* См. рис. 228.

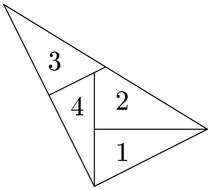


Рис. 227

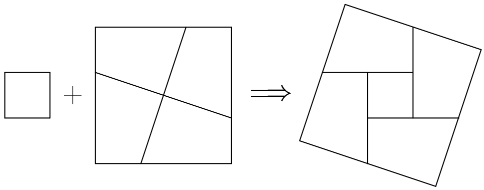


Рис. 228

9.16. *Решение.* **Первый способ** (принадлежит перу знаменитого персидского астронома Абул-Вефа, жившему в Багдаде в X веке). На рис. 229 показано, как Абул-Вефа разрезал три одинаковых квадрата на 9 частей, из которых затем сложил один большой квадрат. Два квадрата он разрезал вдоль диагоналей, а четыре получившихся треугольника расположил вокруг неразрезанного квадрата. Еще четыре разреза (вдоль пунктирных линий) завершают решение.

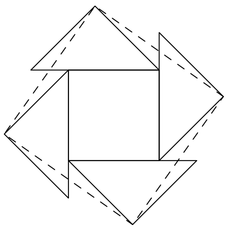


Рис. 229

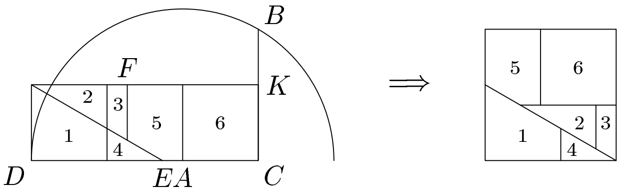


Рис. 230

Второй способ (принадлежит Генри Э. Дьюдени). На рис. 230 показано как три квадрата разрезаются на 6 частей и из них складывается квадрат. Центр окружности находится в точке A. $BC = DE = FK$.

9.17. *Ответ.* См. рис. 231.

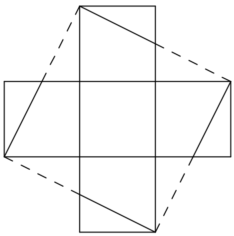


Рис. 231

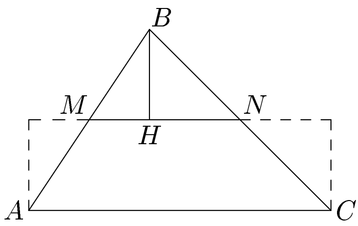


Рис. 232

Урок 9.3

9.18. *Ответ.* См. рис. 232, MN — средняя линия треугольника ABC, а $BH \perp MN$.

9.19. *Решение.* Наложим квадрат $ABCD$ (который нужно получить) на прямоугольник $EFGH$ так, как показано на рис. 233: вершины и F совместятся, а отрезок BC пойдет по отрезку FG. Проведем прямую AG, она пересечет отрезок CD в точке ($DK = 40$ см, $KC = 20$ см), а отрезок EH — в точке A'. Отрежем треугольник $A'HG$ и передвинем его вдоль прямой AK так, что точка G перейдет в точку K, а треугольник $A'HG$ — в треугольник ADK. Отрежем треугольник KCG и перенесем его на место треугольника AEA'. Из прямоугольника $EFGH$ мы сложили квадрат $ABCD$, что и требовалось.

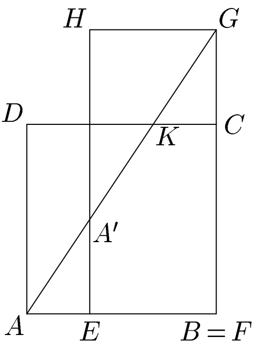


Рис. 233

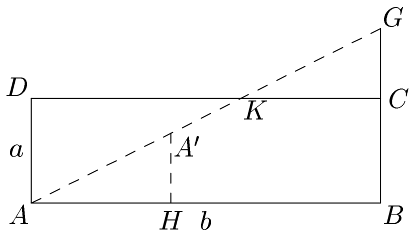


Рис. 234

9.20. *Решение.* Если $a=p$, то $b=q$, и перекраивать ничего не придется (аналогично, если $a=q$). Пусть $a?<<??p$. Если $p-a\leqslant a$ (то есть $p\leqslant 2a$), то решение аналогично решению предыдущей задачи. А именно, сторону BC прямоугольника $ABCD$, где $AB=b$, $AD=a$, продолжим до отрезка BG, равного p (рис. 234). Проведем прямую AG, которая пересечет отрезок CD в точке . Треугольник ADK передвинем вдоль прямой AG так, что точка K совместится с точкой G. Пусть точка A при этом перейдет в точку A'. Опустим перпендикуляр $A'H$ из точки A' на отрезок AB. Отрежем треугольник $A'HA$ и перенесем его на место треугольника GCK. Получим прямоугольник размерами $p\times y$, равновеликий прямоугольнику размерами $a\times b$ (который равновелик прямоугольнику $p\times q$). Поэтому $y=q$, и задача решена.

Если же $p<<?<<na$, где $n\geqslant 2$ (n — целое число), то от прямоугольника $p\times q$ отрежем полоску размерами $a\times q$ и отрежем такую же полоску от первого прямоугольника. Таким образом, за несколько шагов уменьшим длину второго прямоугольника (от числа p до числа p', причем $a?<<??p'\leqslant 2a$), а у первого прямоугольника длина a не изменится, хотя уменьшится ширина. Получили случай, который рассмотрен ранее, и задача решена полностью.

9.21. *Решение.* Пусть размеры прямоугольников $a\times b$ и $p\times q$. По задаче 9.20 перекроим первый прямоугольник так, что его высота станет равной p (т. е. получится прямоугольник $p\times(ab/p)$) и приставим его ко второму прямоугольнику.

9.22. *Ответ.* Верно. *Решение.* Сначала многоугольник разрежем на n треугольников. Каждый треугольник перекроим в прямоугольник (задача 9.18). Получим n прямоугольников. Перекроив пару прямоугольников в один прямоугольник (задача 9.21), переходим к случаю $n_1 = n - 1$ прямоугольников. Проделав эту операцию $(n-1)$ раз, получим один прямоугольник. Затем перекроим его в квадрат (задача 9.20).

9.23. *Решение.* Первый многоугольник перекроим в квадрат (по задаче 9.22), линии раскроя обозначив синим цветом. Второй (равновеликий) перекроим в *тот же* квадрат, линии раскроя обозначив красным. Сведя красные и синие линии на одном чертеже, проведем разрезы по всем этим линиям. Этот раскрой квадрата годится для обоих многоугольников.

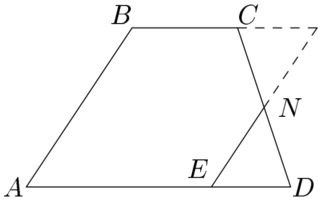


Рис. 235

9.24. *Ответ.* См. рис. 235. Здесь $EN \parallel AB$, точка N — середина отрезка CD.

9.25. *Решение.* 1) Если треугольник уже прямоугольный, то разрезать ничего не нужно.

2) Пусть дан тупоугольный треугольник. Обозначим его ABC, где B — тупой угол (рис. 236). Середины сторон AB и BC обозначим K и L соответственно. На стороне AC выберем точку M такую, что $\angle KML = 90°$. Это можно сделать даже двумя способами, т. к. окружность, построенная на KL как на диаметре, будет пересекать отрезок AC в двух точках. Делая разрезы вдоль KM и ML, получаем три части, из которых составляется прямоугольный треугольник (см. рис. 236).

3) Пусть дан остроугольный треугольник. Разрежем его вдоль любой его медианы. Из полученных частей составляется тупоугольный треугольник, из которого, в свою очередь (по п.2) можно уже получить прямоугольный треугольник.

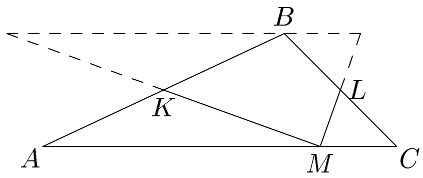


Рис. 236

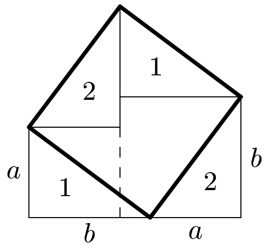


Рис. 237

9.26. *Ответ.* См. рис. 237. Длина стороны третьего квадрата равна $\sqrt{a^2+b^2}$.

§10. Разные задачи на разрезание

Урок 10.1

10.1. *Решение.* Разрежем треугольник по средним линиям. Получим 4 равных равносторонних треугольника. Проделав ту же операцию для всех четырех треугольников, получим 16. А если бы мы только один малый треугольник разрезали по средним линиям, то добавилось бы 3 треугольника (и получилось бы 7). Аналогично можно получить любое число n равносторонних треугольников, если n делится на 3 с остатком 1, т. е. если $n=4$, 7, 10, 13, ... Сто треугольников получить можно.

10.2. *Ответ.* Да, верно. *Решение.* Сторону треугольника разобьем на отрезки по 2 метра, а затем отрежем от треугольника полоску, состоящую из 999+998 равносторонних треугольников со стороной 2 метра (как показано на рис. 238). Останется один равносторонний треугольник со стороной 1996 метров. И всего получится как раз 999+998+1=1998 треугольников.

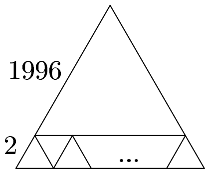


Рис. 238

10.3. *Ответ.* Можно (рис. 239). Каждый из шестиугольных кусков надо дополнительно разрезать по любому диаметру.

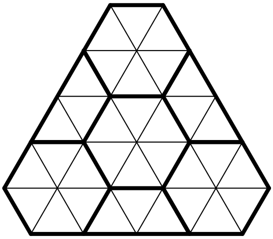


Рис. 239

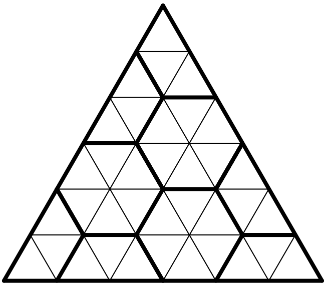


Рис. 240

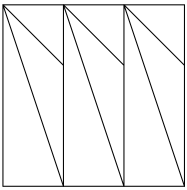


Рис. 241

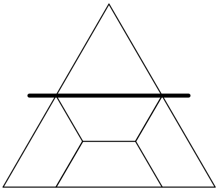


Рис. 242

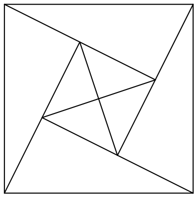


Рис. 243

10.4. *Ответ.* Можно (рис. 240). Каждый из шестиугольных кусков надо дополнительно разрезать по любому диаметру.

10.5. *Ответ.* Да. Пример см. на рис. 241.

10.6. *Ответ.* См. рис. 242.

10.7. *Ответ.* Можно (рис. 243).

Урок 10.2

10.8. *Ответ.* 1) См. рис. 244. 2) Для невыпуклого пятиугольника это неверно.

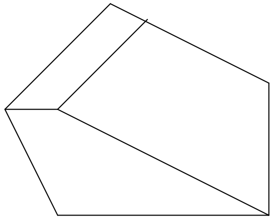


Рис. 244

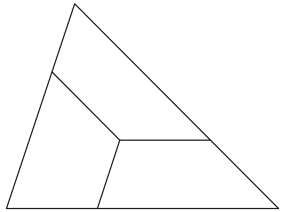


Рис. 245

10.9. *Ответ.* См. рис. 245.

10.10. *Ответ.* Два способа см. на рис. 246.

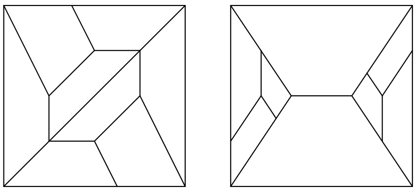


Рис. 246

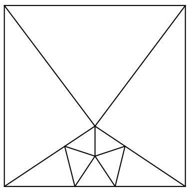


Рис. 247

10.11. *Ответ.* Пример такой раскройки квадрата — на рис. 247. *Комментарий.* Можно доказать, что число остроугольных треугольников, на которые разрезается квадрат, не менее 7.

10.12. *Ответ.* Да, можно (рис. 248). *Решение.* Возьмем равнобедренный треугольник с углами $45°$, $67°30'$ и $67°30'$ ($BC = AC$). Разрежем его по трисектрисам угла B. Тогда треугольники ABK и BHC равнобедренные (в них, соответственно, $AB = BK$ и $BH = HC$), а треугольники ABH и KBH равны, поэтому из треугольников ABH и BKC составляется равнобедренный треугольник, такой же, как $\triangle BHC$.

10.13. *Ответ.* Есть еще такой треугольник, его углы $30°$, $60°$, $90°$ (рис. 249). Здесь $EH \perp AC$, $AH = HC$, CE — биссектриса угла ACB.

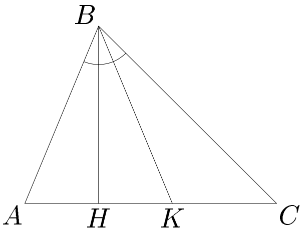


Рис. 248

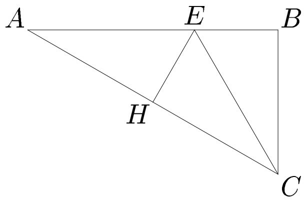


Рис. 249

Урок 10.3

10.14. *Ответ.* Да. См. рис. 250.

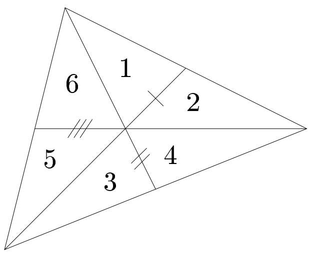


Рис. 250

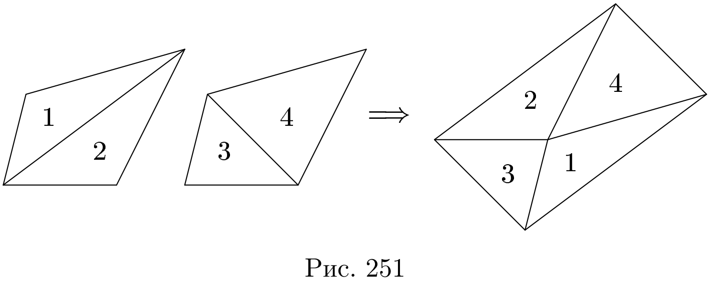


Рис. 251

10.15. *Решение.* Треугольники сложим так, чтобы их попарно равные стороны совпали, а четыре вершины, соответствующие четырем вершинам четырехугольника, сошлись в одну точку (рис. 251). Получим четырехугольник с попарно равными противоположными сторонами, а это — параллелограмм.

10.16. *Ответ.* Нет. Каждая вершина 1000-угольника — это вершина квадрата или пятиугольника, а таких вершин $4 + 5 \cdot 199 = 999$ (меньше тысячи).

10.17. а) *Указание.* Диагональ пересекает $(19 + 98 - 1)$ клеток. Следовательно, к исходному разбиению добавляется 116 частей. Всего будет $1862 + 116 = 1978$ частей.

б) *Указание.* Прямоугольник разобьем на 4 прямоугольника размером 49×999 клеток; диагональ пересекает 2 из них. Числа 49 и 999 взаимно просты. Поэтому на каждом из двух малых прямоугольников диагональ добавляет $49 + 999 - 1 = 1047$ частей. Всего будет $195804 + 2 \cdot 1047 = 197898$ частей.

10.18. *Решение.* **Первый способ**. Вырежем два малых кружка равного радиуса, один с центром в отмеченной точке, а другой — концентрический большому кругу (рис. 252). Теперь поменяем эти кружки местами.

Второй способ. С центром в отмеченной точке проведем окружность того же радиуса, что данная. Дальнейшее очевидно.

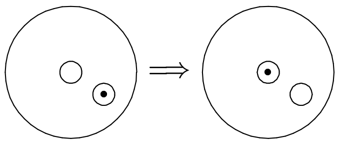


Рис. 252

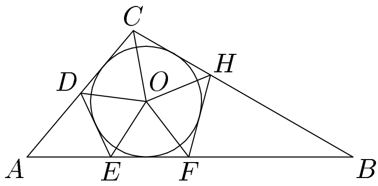


Рис. 253

10.19. *Решение.* Любой тупоугольный треугольник можно разрезать на 7 остроугольных треугольников. Пусть O — вписанная окружность данного треугольника ABC с тупым углом C (рис. 253). Проведем к окружности O касательную DE (точка D на отрезке AC, точка E — на отрезке AB, $AD = AE$. Проведем касательную FH (точка F на AB, точка H — на BC, $BF = BH$). Соединим центр окружности O с точками C, D, E, F, H. Докажем, что все семь треугольников, на который разбивают треугольник ABC проведенные отрезки, остроугольные.

Очевидно, достаточно рассмотреть треугольники с вершиной O. Рассмотрим треугольник OCD. Так как OC — биссектриса угла DCH, то $\angle DCO$ острый. Аналогично, $\angle CDO$ острый (так как DO — биссектриса $\angle CDE$). Углы DCH и CDE тупые. Поэтому $\angle DCO <<? << 45^\circ$, $\angle CDO <<? << 45^\circ$. Следовательно, $\angle COD ? <<?? 90^\circ$. Аналогично для остальных четырех треугольников.

Докажем, что никакой тупоугольный треугольник ABC нельзя разбить на $n ? <<?? 7$ остроугольных треугольников. Пусть разбить можно, и n — наименьшее такое число. Некоторый разрез выходит из точки C и не доходит до AB (иначе для другого тупоугольного треугольника число n можно уменьшить). Рассмотрим лучи, выходящие из точки O — конца этого разреза CO. Этих лучей не менее 5, так как соседние лучи должны образовывать острые углы. Каждый из них проведен до некоторой стороны треугольника ABC (если бы какой-то из них заканчивался в точке O_1 внутри треугольника ABC, то из точки O_1 выходило бы не менее 5 лучей, и общее число треугольников было бы не менее 8). Кроме того, к каждой стороне треугольника ABC подходит не более двух отрезков, выходящих из точки O. Иначе, рассуждая как раньше, мы нашли бы тупоугольный треугольник, для которого число n можно заменить меньшим. Отсюда следует, что ни один из отрезков, выходящих из точки O, не заканчивается ни в вершине A, ни в вершине B треугольника ABC. Поэтому точки A и B принадлежат некоторым другим остроугольным треугольникам, так что общее число остроугольных треугольников не менее 7.

10.20. *Решение.* Длину дуги выпуклой считаем со знаком «+», а вогнутой со знаком «−» (рис. 254). Сделав разрез, мы не меняем сумму длин всех дуг, подсчитанную с учетом знаков. Вначале эта сумма была положительной (длина границы круга), а если бы можно было перекроить круг в квадрат, она стала бы нулевой. Значит, перекроить круг в квадрат нельзя.

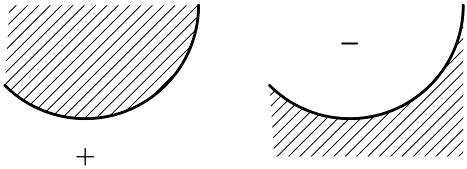


Рис. 254

§11. Площади фигур

Урок 11.1

11.1. *Решение.* Из рис. 255 видно, что окрашенная часть звезды равносоставлена с остальной частью.

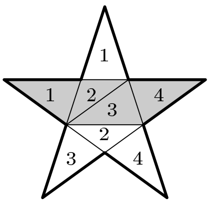


Рис. 255

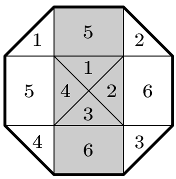


Рис. 256

11.2. *Решение.* На рис. 256 показано как разбить восьмиугольник на 12 областей (6 белых и 6 черных). Соответствующие области равной площади (одна черная и одна белая) обозначены одинаково. Поэтому сумма площадей белых участков равна площади черного участка.

11.3. *Решение.* **Первый способ**. Если перегнуть треугольник по прямым MN, KM, NH, то вершины треугольника ABC сойдутся в одной точке (рис. 257); из рисунка видно, что закрашенная часть равносоставлена с остальной частью треугольника.

Второй способ. $MN = \frac{1}{2}AB$ (так как AB — средняя линия треугольника ABC), $S_{KMNH} = KM \cdot MN$, $= \frac{1}{2}h$ (где h — высота треугольника ABC), $S_{KMNH} = \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

11.4. *Решение.* Из рис. 258 видно, что площадь закрытой части листка больше площади открытой на величину площади закрашенного прямоугольника.

11.5. *Решение.* Эти площади равны, что видно из рисунка 259. Данный шестиугольник разбит на три параллелограмма. Половина каждого параллелограмма белая, а половина — черная.

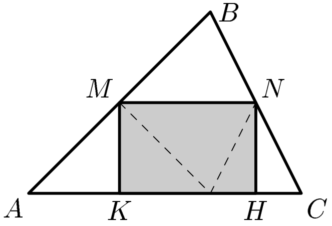


Рис. 257

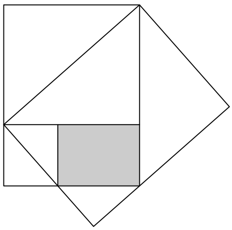


Рис. 258

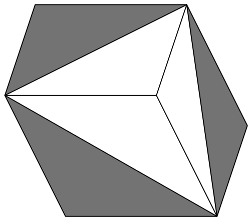


Рис. 259

11.6. *Решение.* Сумма всех углов шестиугольника равна 720°, так, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 360^\circ.$$

Это означает, что из треугольников B_1CA_1, A_1BC_1 и C_1AB_1 можно сложить треугольник (рис. 260). Его стороны будут равны A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1, то есть треугольник $A_1B_1C_1$ разбивается на треугольники, соответственно равные B_1CA_1, A_1BC_1 и C_1AB_1. Отсюда все следует.

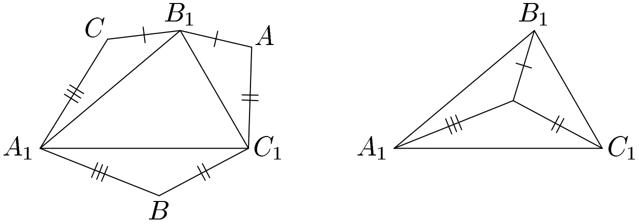


Рис. 260

Урок 11.2

11.7. *Решение.* Область 1 вместе с областью 3 занимают половину площади щита (рис. 261), так как это полукруг: площадь щита равна $(\pi R^2)/4$, а площадь полукруга равна $(\pi(\frac{R}{2})^2)/2 = (\pi R^2)/8$. Область 2 вместе с областью 3 также занимают половину площади щита. Поэтому площади областей 1 и 2 равны.

11.8. *Решение.* Нетрудно заметить, что сумма черной части прямоугольника и белых частей 1 и 2 составляет половину его площади (так как площадь треугольника KAM равна половине площади прямоугольника $KMNL$, см. рис. 262). Также сумма серых частей и белых частей 1 и 2 составляют половину площади прямоугольника (так как сумма площадей треугольников KMB и BNL составляет половину площади прямоугольника). Отсюда следует, что площадь черного участка равна сумме площадей серых участков.

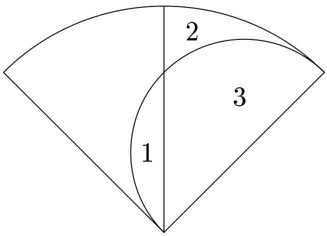


Рис. 261

11.9. *Решение.* Сумма площадей четырех треугольников CAF, DAE, CBF, DBE равна площади прямоугольника $CDEF$, поскольку сумма площадей первых двух треугольников, как и сумма площадей остальных двух треугольников, равна половине площади прямоугольника. Эта сумма равна удвоенной серой части плюс его белая часть (рис. 263). Аналогично, сумма площадей четырех треугольников CAD, FAE, CBD, FBE равна площади прямоугольника и равна площади белой части плюс удвоенная площадь черной части. Отсюда следует утверждение задачи.

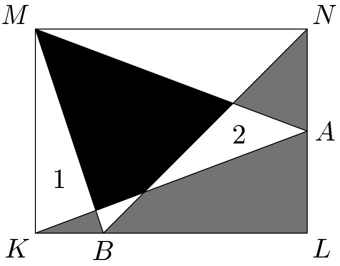


Рис. 262

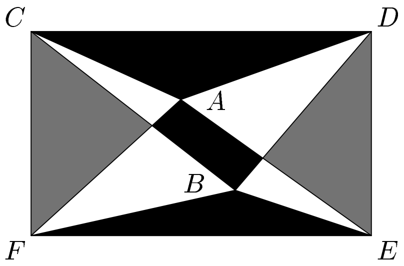


Рис. 263

11.10. *Решение.* На стороне AC треугольника ABC отметим точку D так, чтобы $AD = \frac{1}{5}AC$ (рис. 264), на стороне BC отметим точку так, чтобы $BE = \frac{1}{4}BC$ и т. д: $DF = \frac{1}{3}DC$, $EG = \frac{1}{2}EC$.

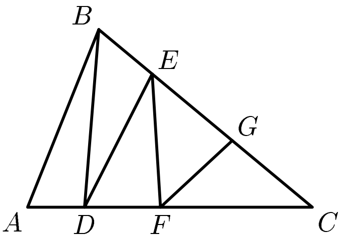


Рис. 264

11.11. *Решение.* Пусть a — длина стороны большего, а b — длина стороны меньшего квадратов. Очевидно, что площадь двух заштрихованных трапеций в сумме равна $\frac{a+b}{2} \cdot (a - b) = \frac{a^2-b^2}{2}$. Такова же суммарная площадь не заштрихованных трапеций, что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] *Гарднер М.* Математические досуги.— М.: Мир, 2000.

[2] *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки, или Арифметика для всех.— Ростов-на-Дону: Кн. изд-во, 1995.

[3] *Заславский А.* Паркеты и разрезания // Квант, 1999, №2, С. 32–33.

[4] *Кольцова М. М., Рузина М. С.* Ребенок учится говорить. Пальчиковый игротренинг.— СПб.: ИД «МиМ»,1998.

[5] *Кордемский Б. А., Русалев Н. В.* Удивительный квадрат. — М.: Учпедгиз, 1952.

[6] *Кукин Г. П., Воеводина К. Н., Кузнецова О. Б., Криса Н. А.* Комбинаторика для начинающих, ч. 2. — Омск: Омск. ун-т, 1993.

[7] *Линдгрен Г.* Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.

[8] Математический цветник. — М.: Мир, 1983.

[9] *Мочалов Л. П.* Головоломки. — М.: Наука, 1980.

[10] *Шарыгин И. Ф., Шевкин А. В.* Математика. — М.: Просвещение, 1995.

[11] *Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н.* Наглядная геометрия. Учебное пособие для 5–6 классов. — М.: МИРОС, КПЦ «Марта», 1992.

Оглавление

Ответы и решения

Екимова Марина Алексеевна
Кукин Георгий Петрович

Задачи на разрезание

Оригинал-макет Д. А. Ланин. Художник Д. А. Ланин.
Корректор А. Ю. Котова.

Подписано в печать 01.08.2002 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования.
Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
144010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554-21-86