Большая перемена

Э.Н. Балаян

800
ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

9–11 классы

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ : 9–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2013. — 317, [2] с. — (Большая перемена)

ISBN 978-5-222-20106-8

В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня трудности для учащихся 9–11 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, геометрические задачи и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения, причем некоторые задачи решены различными способами. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

Пособие предназначено прежде всего старшеклассникам общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, а также к ЕГЭ, студентам — будущим учителям, работникам центров дополнительного образования, и всем любителям математики.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-20106-8 ББК 22.1я721

Предисловие

Роль олимпиад с каждым годом становится все более значимой. И не случайно многие вузы стали проводить свои олимпиады для будущих абитуриентов, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Победителей, занявших призовые места, освобождали от сдачи экзаменов и зачисляли в вуз.

В связи с этим, назрела необходимость в доступной форме ознакомить широкие массы школьников с характером и типом задач, предлагаемых на олимпиадах.

Обычно традиционные олимпиады проходят в пять туров: школьный, районный (городской), областной (республиканский, краевой), зональный (окружной) и всероссийский.

В книге представлены задачи разного уровня трудности, причем сделано это сознательно с тем, чтобы каждый участник мог что-то решить, ибо если задачи слишком трудны, то дети теряют интерес не только к олимпиаде, но и к изучению математики.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. Среди предложенных задач встречаются как нетривиальные, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и более стандартные, которые могут быть решены оригинальным способом. К числу таких методов можно отнести делимость и остатки, признаки делимости чисел, решение уравнений в целых числах, метод инвариантов, принцип Дирихле, задачи на проценты, логического характера и др.

Эти задачи способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять подобные, а возможно, и более оригинальные задачи, что в итоге приводит со временем к творческим открытиям в различных областях математики.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные школьникам 9–11 классов. Разумеется, читатель может привести и другие, возможно, более изящные решения, за что автор будет весьма признателен.

Книга состоит из двух разделов. В первом приводятся условия задач для 9–11 классов.

Задачи, отмеченные значком (А), авторские, составленные на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Во втором разделе книги приводятся ответы, краткие указания, а к наиболее трудным — решения. Автор настоятельно рекомендует обращаться к решениям в случае, когда задача уже решена, или после неоднократных, но безуспешных попыток самостоятельно ее решить. Надо иметь в виду, что одна самостоятельно решенная задача принесет значительно больше пользы для развития ума, чем несколько других, прочитанных в книге. Только настойчивость, терпение и выдержка помогут вам преодолеть трудности, и вас непременно ожидает успех.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

9 класс

1. Может ли число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчиваться цифрой 7?

2. Сравнить 80^{13} и 10^{28}.

3. Найти условие делимости $(x + 1)^n + (x - 1)^n$ на x, где $n \in N$.

4(A). Делится ли $2^{54} + 1$ на $2^{27} + 2^{14} + 1$?

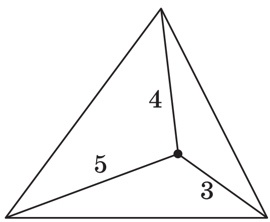
5. Доказать, что если $x > 0$, то $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \dfrac{x}{3}$.

6. Разложить на множители $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.

7(A). Доказать, что если $a + b + c = 0$, то
$2(a^5 + b^5 + c^5) = 25a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4)$.

8. Доказать, что для любого натурального n найдется такое число a, что число $an + 4$ составное.

9(A). Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}$.



10. Точка, взятая внутри правильного треугольника, удалена от его вершин на расстояния 3, 4, 5 единиц. Чему равна сторона треугольника?

11(А). Можно ли разложить 1000 орехов в 7 корзин, расставленных по кругу так, чтобы в любых двух корзинах число орехов отличалось на 1?

12(А). Упростить выражение $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

13. Найти четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

14. В выпуклом пятиугольнике $MNKPE$ углы MNK и KPE равны 30°, а каждая из сторон NK, KP и ME равна 1 и сумма длин сторон MN и PE равна 1. Доказать, что площадь $MNKPE$ равна 1.

15(А). Решить уравнение
$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$

16(А). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)^5-x^5-y^5=-30,\\(x+y)^3-x^3-y^3=-6.\end{cases}$$

17(А). Доказать, что не существует целых чисел a, b и c, таких, что выражение ax^2+bx+c равно 2 при $x=13$ и 3 при $x=60$.

18(А). Решить уравнение $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=20.$

19(А). Как разрезать прямоугольник со сторонами 10 и 33 см на три подобных прямоугольника, среди которых нет равных?

20(А). В ΔABC $\angle A=60°$, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Найти $\angle B$.

Раздел II

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

9 класс

1. *Решение.* Данная сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$ и может оканчиваться на 0, 1, 3, 5, 6, 8, но не на 7.

Ответ: нет.

2. *Решение.* $80^{13} < 81^{13} = (3^4)^{13} = 3^{52} < 3^{56} = (3^4)^{14} = (3^2)^{28} = 9^{28} < 10^{28}$.

Ответ: $80^{13} < 10^{28}$.

3. *Указание.* Если n — нечетное, то делится; если n — четное, то не делится. Положить $x = 0$.

4. *Ответ:* делится.

Указание. Положить $2^{13} = x$, тогда $2^{54} + 1 = 4x^4 + 1$; $2^{27} + 2^{14} + 1 = 2x^2 + 2x + 1$, и т. д.

5. *Решение.* Возведем обе части неравенства в куб: $1 + x < 1 + 3 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} = \left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$.

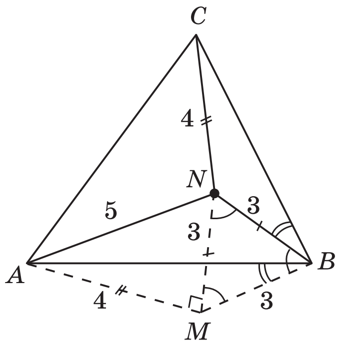
6. *Ответ:* $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

7. *Указание.* Показать, что $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

8. *Указание.* Достаточно взять $a = n + 4$, тогда $an + 4 = (n + 2)^2$ — составное.

9. *Ответ:* $(\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

10. *Указание.* $\angle AMB = 150°$ (см. рис.). AB находим из ΔAMB по теореме косинусов.



Ответ: $\sqrt{25+2\sqrt{3}}$.

11. *Решение.* Нет, так как иначе корзины с четным и нечетным количеством орехов должны чередоваться, т. е. корзин должно быть четное число.

12. *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

13. *Ответ:* 4567.

14. *Указание.* Учесть, что ΔMNK и ΔKPE вместе составляют ΔMKE. Тогда площадь пятиугольника равна двум площадям ΔMKE, т. е. равна $2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot = 1$.

15. *Ответ:* $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$.

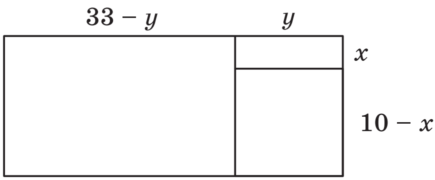
16. *Ответ:* $(2; -1)$, $(-1; 2)$, $(-1; 1)$.

Указание. $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. Далее замена $x + y = a$, $xy = b$, и т. д.

17. *Решение.* При $x = 13$ имеем $a \cdot 13^2 + b \cdot 13 + c = 2$, а при $x = 60$ получим $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 3$. Вычитая из второго равенства первое, находим $a(60^2 - 13^2) + b(60 - 13) + c = 1$, а если a и b — целые, то 1 делится на $60 - 13 = 47$, что неверно.

18. *Ответ:* $x_{1,2} = \pm 8$.

19. *Решение.* Из подобия прямоугольников имеем $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{10-x} = \dfrac{10}{33-y}$.



Из I и II уравнений $x = \dfrac{10}{33-y}$. (1)

Из II и III уравнений получим $y(33 - y) = 100 - 10x$, или, учитывая (1), находим $y(33 - y) = \dfrac{100(33-2y)}{33-y}$, или $y(33 - y)^2 = 100(33 - 2y)$, или

$y^3 - 66y^2 + 1289y - 3300 = 0$. (2)

Можно убедиться, что $y = 3$ — корень уравнения (2), тогда $(y - 3)(y^2 - 63y + 1100) = 0$, откуда $y = 3$. Уравнение $y^2 - 63y + 1100 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$. Итак, $y = 3$, тогда из (1) получим $x = 1$.

20. *Ответ:* $75°$.

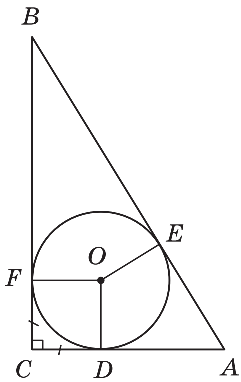
Указание. Использовать теоремы синусов и косинусов.

21. *Решение.*

I способ

Поскольку $OD \perp AC$, $OF \perp BC$ и $\angle C = 90°$, то $FODC$ — квадрат. $OD = OF = OE = r$, $AD = b - r$, $BF = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB =$

$= AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, ч. т. д.



II способ

Заметим, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, тогда $ab = (a + b + c)r$, откуда $r = \dfrac{ab}{a+b+c}$. (1)

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, или $(a + b)^2 - 2ab = c^2$, т. е. $2ab = (a + b)^2 - c^2$, или $2ab = (a + b - c)(a + b + c)$, тогда (1) примет вид $r = \dfrac{2ab}{2(a+b+c)} = \dfrac{(a+b-c)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \dfrac{a+b-c}{2}$, ч. т. д.

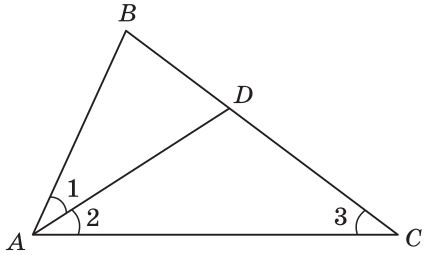
22. *Указание.* $12(x + y) = (5x + 7y) + (7x + 5y)$.

23. Пусть n — число домов, a — первый и b — последний номера домов. Так как номера домов возрастают на 2, то имеем возрастающую арифметическую прогрессию, тогда $S_n = \dfrac{a+b}{2} \cdot n = 423$. Но $423 = 3 \cdot 3 \cdot 47$, и так как $n \geq 5$, то $n = 9$. Значит, номер пятого (среднего) дома равен 47.

24. *Решение.*

I способ

Проведем биссектрису AD угла A, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, т. е. $AD = DC$. Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$.



Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$). Из подобия имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, или $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x+2} = \frac{y}{5}$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x+2} = \frac{y}{5}; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$ откуда, вычитая из I уравнения II, получим $5y - 10 = 2y$, или $y = \frac{10}{3}$, тогда

$5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$, откуда $x = 4$.

Значит, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

II способ

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 180° - 3\alpha$. Полагая, что $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(180° - 3\alpha)}$, или

Литература

1. *Балаян Э.Н.* 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике. — 3-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2008.

2. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

3. *Балаян Э.Н.* 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

4. *Бартенев Ф.А.* Нестандартные задачи по алгебре — М.: Просвещение, 1976.

5. *Дьюдени Г.Э.* 520 головоломок. — М.: Просвещение, 1983.

6. *Коваль С.* Математическая смесь. — Варшава, 1972.

7. *Лоповок Л.М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.

8. *Мазаник А.А.* Реши сам. Ч. III. — Минск: Народная Асвета, 1972.

9. *Малаховский В.С.* Числа знакомые и незнакомые. — Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2005.

10. *Минаева С.С.* Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. — М.: Просвещение, 1983.

11. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

12. *Тригг У.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975.

Содержание

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

800

ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

9–11 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 25.05.2012. Подписано в печать 08.08.2012.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,8. Тираж 2500 экз.
Заказ №

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.